

Zeitschrift: Bollettino della Società ticinese di scienze naturali
Herausgeber: Società ticinese di scienze naturali
Band: 17 (1922)

Artikel: Delle variazioni del saggio d'interesse
Autor: Bordin, Arrigo
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1002864>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Delle variazioni del saggio d'interesse

§ 1 Le formule che di solito sono date nei testi di matematica finanziaria o in istudi che trattano di codesta materia e che tengono conto del saggio d'interesse, considerano questa grandezza come costante nel tempo. Pochi studi contemplanò il caso di variabilità, ma non dànno ampia trattazione all'argomento, almeno nell'estensione che comunemente si pone nella considerazione del caso di costanza del saggio. D'altra parte è risaputo che molti problemi, specie d'attuarìa, non possono prescindere dal carattere di variabilità. Nell'intento di contribuire, per lo meno in parte, a colmare la lacuna c'intratteremo sull'argomento, procurando di dare ad esso la maggiore completezza possibile anche a costo di richiamare cose note.

§ 2. Notiamo con $i = f(x)$ il saggio d'interesse riferito ad una unità di capitale e per un periodo uguale ad un anno; supponiamo $f(x)$ funzione continua e finita per qualsiasi valore della variabile indipendente X , nel campo di variabilità di essa nel quale avvengono le operazioni di capitalizzazione che più sotto considereremo. Esaminiamo le solite forme di esse: (1)

« CAPITALIZZAZIONE ALL'INTERESSE SEMPLICE »

Il montante d'una unità di capitale dopo un tempo infinitesimo dx è definito da:

$$M_{dx} = 1 + i dx$$

e per un periodo da t a $t+k$ (interi e frazionari)

$$(1) \quad M_k = 1 + \int_t^{t+k} f(x) dx$$

se $i = \text{costante (c)}$

$$(1') \quad M_k = 1 + k i$$

che è la solita formula.

(1) Con x rappresentiamo la variabile tempo.

Nel caso di sconto essendo

$$S_{dx} = 1 - i dx$$

sarà

$$(2) \quad S_k = 1 - \int_t^{t+k} f(x) dx$$

per $i = c$

$$(2^1) \quad S_k = 1 - k$$

e di sconto così detto razionale

$$S_{dx}^1 = 1 - \frac{i dx}{1 + i dx}$$

tale che

$$\left(1 - \frac{i dx}{1 + i dx}\right) (1 + i dx) = 1$$

avremo pure

$$S_k^1 = 1 - \frac{\int_t^{t+k} f(x) dx}{1 + \int_t^{t+k} f(x) dx},$$

per $f(x) = c$

$$(3) \quad S_k^1 = 1 - \frac{ik}{1 + ik},$$

semplificando

$$(4) \quad S_k^1 = \frac{1}{1 + \int_t^{t+k} f(x) dx}$$

$$(4^1) \quad S_k^1 = \frac{1}{1 + ik}$$

che sono le reciproche delle (1) e (1¹) e sono sempre positive.

Geometricamente, ponendo $(M_k, S_k, S_k^1) = y$ e restando x variabile indipendente le (1¹) (2¹), essendo $(x = k)$, sono le equazioni d'una stessa retta; per la (4¹) derivando rispetto a K :

$$(a) \quad y' = - \frac{i}{(1 + ik)^2}$$

$$(b) \quad y'' = 2 \frac{Ki^3 + i^2}{(1 + iK)^3}$$

Essendo K variabile da 0 a $+\infty$ la (4') ci dice che per $K = +\infty$, $S'_k = 0$. Inoltre nella (b) $y'' > 0$ ed essendo $S'_k > 0$ la curva è convessa rispetto ad x ;

La (4') dice inoltre che la curva è immagine d'una progressione armonica positiva ed è per la stessa e la (a) asintotica con $+x$.

Operando analogamente per le (1) (2) (4) non possiamo stabilire la rappresentazione geometrica di essa fino a che non si conosca l'espressione analitica di f di (x) .

«CAPITALIZZAZIONE ALL'INTERESSE COMPOSTO, DISCONTINUA» Possiamo per questa forma fare diverse supposizioni. La più generale consiste nel ritenere che i tempi di capitalizzazione si succedano con un intervallo variabile secondo una legge da stabilirsi e che durante l'intervallo stesso il montante al precedente tempo di capitalizzazione frutti all'interesse semplice variabile in funzione del tempo.

Posti i tempi di variabilità

$$(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$$

il montante sarà dato dall'espressione generale

$$(5) M_k = \left[1 + \int_t^{t+C} f_1(x) dx \right] \left[1 + \int_{t+C}^{t+C_1} f_1(x) dx \right] \dots \left[1 + \int_{t+C_{n-1}}^{t+k} f_1(x) dx \right]^{1)}.$$

Si possono porre varie restrizioni; siano le più usate:

$$(\alpha) \left[t + C_i \right] - \left[t + C_{i-1} \right] = 1 = t_i - t_{i-1}$$

che è la legge più comune di successione degli intervalli suddetti

$$(\beta) \quad i = f(t_i) \quad (2)$$

e costante durante tutto l'intervallo C_i, C_{i+1}

E quindi per la (5) accettando tutte e due le ipotesi

$$(5^1) M_k = \left[1 + (t_1 - t) i_{t_0} \right] \left[1 + i_{t_1} \right] \dots \left[1 + [(t+k) - (t+C_{n-1})] i_{t_{n-1}} \right]$$

Sussistendo la (α) soltanto

$$(5^2) M_k = \left[1 + \int_t^{t_1} f_1(x) dx \right] \left[1 + \int_{t_1}^{t_1+1} f_1(x) dx \right] \dots \left[1 + \int_{t_1+(n-1)}^{t+k} f_1(x) dx \right]$$

(1) $(t + C_i)$ istante di capitalizzazione)

(2) Evidentemente se la (β) non risulta dall'istogramma data, i è il risultato d'una media aritmetica ponderata.

o solo la (β)

$$(5^3) \quad M_k = \left[1 + c i_t \right] \left[1 + (C_1 - C) i_{t_1} \right] \dots \left[1 + (K - C_{n-1}) i_{t_{n-1}} \right]$$

Infine accettando le (α) (β) e supponendo ancora $i = C$ si ricade nella solita formula del montante.

$$(5^4) \quad M_k = \left[1 + (t_1 - t) i_{t_0} \right] \left[1 + i_{t_0} \right]^{t_n - t_{n-1}} \left[1 + (t + k - t_{n-1}) i_{t_0} \right]$$

Nel caso di sconto definitivo secondo la (5) avremo da

$$(6) \quad G = \left[1 + \int_t^{t+C} \frac{f_1(x)}{f_1(x)} dx \right] \dots \left[1 + \int_{t+C_{n-1}}^{t+k} \frac{f_1(x)}{f_1(x)} dx \right] S_t$$

S_t risolvendo rispetto ad essa questa equazione. (G) è il capitale riferito al tempo $(t + k)$

« CAPITALIZZAZIONE ALL'INTERESSE COMPOSTO, CONTINUA » Essa è definita da

$$M_k = \left[1 + \frac{f(t+dx)}{m} \right] \left[1 + \frac{f(t+2dx)}{m} \right] \dots \left[1 + \frac{f(t+k)}{m} \right] \text{ dove } m \equiv +\infty$$

Ma

$$\left[1 + \frac{f(x)}{m} \right]^m = e^{f(x)}$$

d'onde

$$\left[1 + \frac{f(x)}{m} \right] = \sqrt[m]{e^{f(x)}} = e^{\frac{1}{m} \log e^{f(x)}} = e^{\frac{1}{m} \log e^{f(x)}} = e^{\frac{1}{m} f(x)}$$

quindi

$$\log M_k = \int_t^{t+k} f(x) dx$$

$$(7) \quad M_k = e^{\int_t^{t+k} f(x) dx}$$

per $f(x) = C$

$$(7^1) \quad M_k = e^{ki}$$

che è la formula comune.

Anche in questo caso si possono rendere valide le (α) e (β) . Accettando (β)

$$\log M_k = (t_1 - t) i_{t_0} + (t_2 - t_1) i_{t_1} + \dots + (t + k - t_n) i_{t_n}$$

$$(7^2) \quad M = e^{(t_1 - t) i_{t_0} + (t_2 - t_1) i_{t_1} + \dots + (t + k - t_n) i_{t_n}}$$

e sussistendo pure (α)

$$(7^3) \quad M = e^{(t_1 - t) i_{t_0} + i_{t_1} + i_{t_2} + \dots + (t + k - t_n) i_{t_n}}$$

Nel caso di sconto analogamente alla (6) in via generale

$$(8) \quad S_k = \frac{G}{e^{\int_t^{t_1} f(x) dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx + \dots + \int_{t_n}^{t+k} f(x) dx}}$$

La (5⁴) è rappresentata da una curva sempre positiva convessa rispetto a x tendente ad essere parallela ad y per $x = +\infty$ e assintotica con x per $x = -\infty$. Lo stesso dicasi della (7⁴). È supposto $x = t_{n-1} - t_1 = k$

§ 3. «LA FUNZIONE $f(x)$ ». L'abbiamo supposta continua, per semplicità di calcolo. In realtà si può dire che essa non lo sia e precisamente, in via generale, rimane costante per ogni punto dell'intervallo della x definito tra due punti limiti in cui la funzione assume un valore diverso da quello mantenuto costante nell'intervallo stesso e varia in modo discontinuo da un intervallo all'altro. (1)

In altre parole l'immagine geometrica di $f(x)$ ottenuta unendo il vertice delle successive ordinate con segmenti di retta è data da una spezzata a segmenti paralleli e perpendicolari all'asse delle x appartenente ad una coppia cartesiana ortogonale. E però la superficie limitata da x , la spezzata suddetta e le due normali nei punti estremi di x , è data da un istogramma. In modo analogo all'applicazione del metodo dei minimi quadrati nella ricerca d'una curva funzione continua extra-polatoria che sostituisca un diagramma dato, procediamo alla determinazione di $f(x)$ tale che la somma dei quadrati delle differenze tra la superficie di ciascuno dei rettangoli del suddetto istogramma e l'integrale di $f(x)$ definito tra i due valori di x la cui differenza è la base del rettangolo, sia un minimun.

(1) Per amor di generalità possiamo anche ritenere $f(x) = 0$ per alcuni intervalli di x .

Sia $t_{s+1} - t_s = p_{ts}$
 per cui $f(x) = i_{ts} = C$

dovrà aversi

$$(9) \quad \sum_{s=0}^{s=n} \left[p_{ts} i_{ts} - \int_{t_s}^{t_{s+1}} f(x) dx \right]^2 = \text{minimum}$$

supposto

$$(10) \quad f(x) = a x^m + b x^{m-1} + \dots + v x + z$$

funzione intera di x dove di solito $m < n$, il primo membro della (9) sarà uguale a:

$$(11) \quad \sum_{s=0}^{s=n} \left\{ p_{ts} i_{ts} - \left[\frac{a}{m+1} (t_{s+1}^{m+1} - t_s^{m+1}) + \frac{b}{m} (t_{s+1}^m - t_s^m) + \dots + \frac{v}{2} (t_{s+1}^2 - t_s^2) + z (t_{s+1} - t_s) \right] \right\}^2$$

sviluppando il quadrato e derivando ordinatamente rispetto ad $a, b, \dots, z$, avremo il seguente sistema di equazione ugagliate a 0 per la condizione espressa dalla (9). ⁽¹⁾

$$\sum_{s=0}^{s=n} \left[\frac{a K^{m+1} K^{m+1}}{(m+1)^2} + \frac{b K^m K^{m+1}}{m(m+1)} + \frac{c K^{m-1} K^{m+1}}{(m-1)(m+1)} + \dots + \frac{z K K^{m+1}}{(m+1)} \right] = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{p_{ts} i_{ts} K^{m+1}}{(m+1)}$$

$$\sum_{s=0}^{s=n} \left[\frac{a K^{m+1} K^m}{(m+1)(m)} + \frac{b K^m K^m}{m^2} + \dots + \frac{z K K^m}{m} \right] = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{p_{ts} i_{ts} K^m}{m}$$

..... (H)

$$\sum_{s=0}^{s=n} \left[\frac{a K^{m+1} K}{m+1} + \frac{b K^m K}{m} + \dots + z K K \right] = \sum_{s=0}^{s=n} p_{ts} i_{ts} K$$

(1) Anche la derivata seconda è positiva poichè $k^j > 0$

dove per semplicità abbiamo posto il simbolo $k^j = \binom{j}{s+1} - \binom{j}{s}$

Il determinante A del sistema descritto è eguale a 0 perchè a due a due le linee sono proporzionali. Ma per la stessa ragione sono eguali a zero pure i determinanti $A^a, A^b, \dots, A^z$ ottenuti da A sostituendo nella colonna dei coefficienti d'una incognita i termini noti del sistema suddetto. D'onde la conseguenza che per i coefficienti a, b, c, ..., z, le soluzioni sono infinite. Di più, rappresentando le equazioni (H) un sistema di curve la conclusione cui siamo pervenuti significa che vi sono infiniti punti di contatto tra di esse e che quindi le condizioni suddette coincidono. Per cui basterà porre un sistema di due equazioni, la prima delle quali sia una qualsiasi delle (H) la seconda una condizione arbitraria cui deve sottoporsi la (10) o una sua derivata, nelle quali si pongono come noti i parametri (a, b, ... z) meno due avremo un sistema del tipo:

$$A_a + B_a + C = 0$$

$$A'_a + B'_a + C' = 0$$

per le quali si abbia

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0$$

dal quale risulteranno determinati i rimanenti parametri a, b, — (1).

Da ciò si vede che se prendiamo come comune avviene per f(x) una funzione intera di x descritta dalla (10) occorre almeno una nuova condizione cui debbono soddisfare i coefficienti della stessa. Ad es.: la curva rappresentata dalla (10) deve passare per un punto del diagramma primitivo.

Per la (5) dovrà aversi inoltre

$$\left[1 + \int_t^{t+C} f_1(x) dx \right] \left[1 + \int_t^{t+C_1} f_1(x) dx \right] \dots \left[1 + \int_t^{t+k} f_1(x) dx \right] \cdot \left[1 + p \frac{i}{c} \right] \left[1 + p \frac{i}{c_1 c} \right] \dots$$

$$\left[1 + p \frac{i}{k-C-n_1} \right] = \text{minimum} \quad (2)$$

(1) Essendo $(m+1)$ il numero dei parametri della (10) si potranno in generale, fissare in luogo di una, altre condizioni.

(2) $i_{c_j-c_{j-1}}$ è il risultato evidente d'una media ponderata.

per la quale sottraendo ordinatamente da ogni fattore del primo termine il corrispondente del secondo (appartenenti al primo membro) e ponendo

$$\left[1 + \int_{t+C_{j-1}}^{t+C_j} f_1(x) dx \right] - \left[1 + p_{c_j-c_{j-1}} i_{c_j-c_{j-1}} \right] = d_{c_j}$$

fissiamo la condizione più restrittiva

$$(12) \quad d_{c_1} \cdot d_{c_2} \cdot d_{c_3} \dots d_k = \text{minimun}$$

La quale sarà soddisfatta a maggiore ragione se

$$d_{c_1}^2 \cdot d_{c_2}^2 \dots d_k^2 = \text{minimum}$$

che a sua volta maggiormente è valevole se

$$d_{c_1}^2 + d_{c_2}^2 + d_{c_3}^2 + \dots d_k^2 = \text{minimum} \quad (1)$$

Questa eguaglianza è espressa dalla (9) e quindi, per opportuni valori di s le condizioni che abbiamo descritte per (9) valgono anche per la (12).

§ 4. Le formule (5,¹,²,³) e la conseguente (6) comportano di solito un calcolo laborioso. Qualora non si richieda una precisione assoluta si possono semplificare adottando in luogo di $f(x)$ o dei prodotti da cui essa ha origine una nuova funzione di x che semplifichi il calcolo cui esse danno luogo. Adottiamo la più generale delle suddette espressioni: dalla (5) si ha, ponendo in luogo di $f(x)$ la media aritmetica ponderata dei diversi valori di i nell'intervallo $(C_i - C_{i-1})$ in rapporto agli intervalli di x per cui i è costante.

$$\log M_k = \log \left[1 + p_{c_1} i_{c_1} \right] + \log \left[1 + p_{c_2-c_1} i_{c_2-c_1} \right] + \dots + \log \left[1 + p_{c_k-c_{k-1}} i_{c_k-c_{k-1}} \right] = \int_t^{t+k} F(x) dx$$

Sia

$$\log \left[1 + p_{c_j-c_{j-1}} i_{c_j-c_{j-1}} \right] = r_{c_j}$$

(1) Date infatti $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \dots f_r(x)$ le rispettive derivate dal prodotto e della somma eguagliate a zero sono:

(I) $f_1'(x) f_2(x) \dots f_r(x) + f_2'(x) f_1(x) \dots f_r(x) + \dots + f_r'(x) \dots f_{r-1}(x) = 0$

(II) $f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_r'(x) = 0$ la quale, pel sistema (H) è soddisfatta pel valore zero dei singoli termini, condizione che a sua volta soddisfa anche la (I).

per cui stabilendo al solito che

$$(13) \quad \sum_{j=0}^{j=n-1} \left[r_{cj} - \int_{t+Cj}^{t+Cj+1} F(x) dx \right]^2 = \text{minimum}$$

ricadiamo nell'analogia (9) e se per $F(x)$ adottiamo un'espressione simile alla (10) si estendono ad essa le considerazioni che abbiamo fatte per la (10) stessa. Si otterrà quindi

$$M_k = e \int_t^{t+k} f(x) dx$$

Dalle note suddette deduciamo che pure essendo analoghi i procedimenti e le conclusioni che abbiamo adottato per le (9) (12) e a maggior ragione per la (13) i parametri di $f(x)$ e di $f_1(x)$ sono in generale diversi anche se si assume come comune equazione determinante un'unica condizione espressa dalla seconda di pag. 16. Di più avvertiamo che in generale diversificano dai parametri suddetti anche quelli di $f_2(x)$ ottenuta col metodo dei primi quadrati applicato nella ricerca d'una funzione analitica extrapolatoria delle ordinate dell'istogramma dato e quindi non si possono ricondurre le diverse soluzioni ad una sola per rendere più brevi le diverse operazioni di capitalizzazione applicabili alla $f(x)$ di cui abbiamo parlato nei primi §§.

Abbiamo scelto nei nostri calcoli per $f(x)$ l'espressione (10). Essa fu adottata per spirito di generalità non conoscendo a priori nessuna caratteristica dell'istogramma iniziale e quindi non potendo applicare i metodi di Gauss, Pearson che sono efficaci in casi più particolari; per semplicità di esposizione abbiamo anche tralasciato la serie interpolatrice di Bruns essendo la (10) sufficiente per le nostre considerazioni.

Aggiungiamo infine che talvolta la (10) viene adottata anche per tempi posteriori a quelli considerati nell'istogramma primitivo pensando che l'uniformità da essa rappresentata sia estensibile anche fuori del tempo per la quale fu desunta. E' bene avvertire però che conviene in tal caso assumere per essa un numero piccolo di parametri (il limite di esso

è arbitrario e sta all'abilità del calcolatore il fissarlo) per non attribuire all'uniformità avvenire caratteri troppo particolari del tempo in cui la f fu desunta. Di più, non essendo certo il valore delle singole ordinate sarà bene dare ad esso un coefficiente di probabilità, prima d'operare con esse come abbiamo fatto. Data la specie della funzione che studiamo non crediamo possibile l'espressione di una funzione analitica fondata, non sull'esperienza diretta, ma su alcuni caratteri conosciuti a priori della successione dei diversi valori dell'interesse nel tempo analoga ad esempio a quella di Gompertz e di Mackeham per la mortalità. Anche pensando ad esempio che (i) sia funzione del totale del risparmio disponibile su di un mercato nel tempo t e nel futuro t_1 e del reddito medio dei capitali investiti negli stessi tempi a loro volta queste variabili, così grossolanamente definite, non sono indipendenti, nè variabili secondo una legge a priori conosciuta sia pure in via approssimativa. Siamo in conclusione dinnanzi ad un particolare della conoscenza dell'avvicinarsi delle onde economiche espresse quantitativamente a mezzo di prezzi delle quali ben poco sappiamo.

Bellinzona, Ottobre 1922.