

Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft =
Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della
Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 66 (1883)

Vereinsnachrichten: Mathématiques

Autor: Fiedler, W.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

sections, très remplies, et dont la plupart se sont prolongées bien avant dans l'après-midi; une promenade en bateau à vapeur autour du lac a ensuite réuni tout le monde, et la fraîcheur du soir a eu vite fait de rétablir dans leur état normal les cerveaux fatigués par les travaux de la matinée.

Le jeudi 9 août enfin, la deuxième séance générale a été remplie par des travaux intéressants de MM. Suess, O. Heer (lu par M. le docteur C. Schröter) et Klebs¹. Un excellent dîner au haut de l'Uetliberg a terminé la réunion, et l'on s'est séparé, chacun suivant son chemin, tous emportant les meilleurs souvenirs.

C'est à Lucerne qu'aura lieu la prochaine session de la Société, sous la présidence de M. Otto Suidter.

Mathématiques.

Président: M. le Prof. W. FIEDLER.

M. le prof. GEISER, de Zurich, fait une communication *Sur les surfaces du 3^{me} degré*. Il donne une démonstration géométrique du fait que le troisième mode de génération de Steiner fournit les surfaces les plus générales de cette classe.

M. le Dr RUDIO, privat-docent à Zurich, *Sur les lignes géodésiques tracées sur les surfaces du 2^{me} degré*.

Soit une surface du 2^{me} degré

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1$$

¹ Voir sections de Géologie, de Botanique et de Médecine.

et sur cette surface, un point x, y, z , de coordonnées elliptiques u, v .

Pour calculer la longueur d'une ligne géodésique de la surface λ qui passe par le point u, v , joignons à la surface (λ) , la surface (μ) qui est touchée par les diverses tangentes à la ligne géodésique considérée. Les tangentes communes aux surfaces (λ) et (μ) peuvent être alors considérées comme les normales d'une nouvelle surface de nature transcendante par rapport à laquelle (λ) et (μ) sont les deux nappes de la surface, lieu des centres de courbure.

Par suite de la relation qui existe entre les lignes de courbure de cette surface transcendante et les lignes géodésiques des surfaces (λ) et (μ) , il suffit de déterminer le rayon de courbure de la surface transcendante au point u, v , pour obtenir en même temps la longueur de la ligne géodésique de (λ) qui passe par u, v . Pour les cosinus directeurs de ce rayon de courbure on trouve les valeurs

$$\xi = x \left\{ \frac{U}{a^2 - u} \frac{\mu - u}{v - u} + \frac{V}{a^2 - v} \frac{\mu - v}{u - v} \right\}$$

$$\eta = y \left\{ \frac{U}{b^2 - u} \frac{\mu - u}{v - u} + \frac{V}{b^2 - v} \frac{\mu - v}{u - v} \right\}$$

$$\zeta = z \left\{ \frac{U}{c^2 - u} \frac{\mu - u}{v - u} + \frac{V}{c^2 - v} \frac{\mu - v}{u - v} \right\}$$

en posant pour abréger

$$U = \sqrt{\frac{(a^2 - u)(b^2 - u)(c^2 - u)}{(\lambda - u)(\mu - u)}}$$

$$V = \sqrt{\frac{(a^2 - v)(b^2 - v)(c^2 - v)}{(\lambda - v)(\mu - v)}}$$

Pour le rayon de courbure lui-même, et par suite aussi pour la longueur de l'arc compté sur une ligne géodésique de λ , depuis un point de départ fixe jusqu'au point u, v , on trouve

$$p = \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{du}{U} + \int \frac{dv}{V} \right\}$$

formule que Jacobi avait déjà obtenue par une méthode dynamique.

Si l'on appelle P_1 le point où la surface μ est touchée par la tangente commune à (λ) et (μ) qui passe par le point $P(u, v)$, on trouve pour la distance PP_1 l'expression

$$z = \frac{u - v}{U - V}$$

M. le prof. FIEDLER, de Zurich, *Sur l'intersection d'hyperboloïdes de révolution équilatères à axes parallèles*. L'auteur montre d'abord que, en considérant les sections coniques de pénétration du faisceau de surfaces déterminé par deux de ces hyperboloïdes, on est conduit à une théorie des sections coniques qui résulte de l'application de la méthode de la cyclographie à des systèmes de cercles, en prenant comme plan de projection un plan perpendiculaire aux axes. Les cercles images des points de l'intersection coupent sous un angle constant chacun des cercles en nombre infini qui correspondent dans le plan au faisceau des traces des surfaces ¹.

¹ Voir le traité : *Cyclographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln, und elementare Geometrie der Kreise und Kugelsysteme*, von Dr W. Fiedler. Leipzig, 1882. Mit 16 lith., S. 160.

En particulier si l'on construit la section conique sur le plan en la considérant comme la projection orthogonale de l'intersection de ce plan avec celui des hyperboloïdes du faisceau qui a son centre dans le plan, et en prenant comme plan auxiliaire celui qui touche l'hyperboloïde dans son cercle de gorge, on arrive¹ à la théorie du tore circulaire de Pappus et à la solution du problème de Steiner qui s'y rattache. On peut y trouver aussi la voie de la découverte communiquée par J. Steiner dans un mémoire publié en 1847².

En outre, en considérant la section conique comme la projection de l'intersection de deux quelconques des hyperboloïdes du faisceau, on peut l'obtenir au moyen de deux cercles qui la touchent en deux points, comme le lieu des points pour lesquels les tangentes menées de ces points aux deux cercles présentent une somme ou une différence constante, et cette longueur constante est égale à la distance normale des plans principaux ou cercles de gorge des deux hyperboloïdes considérés³.

L'auteur montre comment on arrive par ces considérations à construire les sections coniques, correspondant à un ou à deux cercles à double contact moyennant diverses conditions complémentaires, telle que celle des tangentes de somme ou de différence constante, que nous venons de voir pour deux cercles à double contact. L'auteur signale encore le système de sections coniques que l'on obtient avec deux cercles fixes quand on donne successi-

¹ Voir loc. cit., § 166-169.

² Voir Jacq. Steiner's *Gesammelte Werke*, herausgegeben auf Veranlassung der K. Preuss. Academie der Wissenschaft. Vol. II, Berlin, 1882, p. 389, f.

³ Voir *Cyclographie*, p. 170.

vement à cette longueur constante toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'infini. Ce sont les intersections de deux hyperboloïdes, dont l'un reste fixe, tandis que l'autre est successivement déplacé le long de son axe de révolution, à partir de la position où les cercles de gorge sont dans un même plan. On retrouve ainsi tous les résultats remarquables d'un célèbre mémoire de Steiner de 1852¹, avec des résultats complémentaires qui établissent un lien entre eux. L'auteur montre enfin comment la construction se modifie en passant de l'hyperboloïde à une nappe à l'hyperboloïde à deux nappes, et généralement en passant du réel à l'imaginaire, et comment aussi les résultats de cette méthode peuvent être généralisés par les projections.

Nous devons encore mentionner que M. le prof. G. VERONESE, de Padoue, membre honoraire de la Société, empêché par une maladie subite d'assister à la réunion, avait envoyé un mémoire intitulé: *Démonstration géométrique, par la géométrie à n dimensions, de la formule*

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} p \\ r-1 \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} q-1 \\ 1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} q-1 \\ 2 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} p \\ r+1 \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} q-1 \\ 3 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} p \\ r+2 \end{matrix} \right| + \dots \\ = \left| \begin{matrix} p+q-1 \\ q+r-2 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} p+q-1 \\ p-r+1 \end{matrix} \right| \end{aligned}$$

Ce mémoire, arrivé en retard, n'a pas pu être lu à la séance.

¹ Voir loc. cit., II, 445.