

**Zeitschrift:** Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft =  
Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della  
Società Elvetica di Scienze Naturali

**Herausgeber:** Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

**Band:** 100-2 (1919)

**Vereinsnachrichten:** Sezione di Matematica

**Autor:** [s.n.]

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.06.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 1. Sezione di Matematica.

Seduta della Società elvetica matematica.

Lunedì, 8 settembre 1919.

*Presidente:* Prof. Dr. M. PLANCHEREL (Freiburg).

*Segretario:* Prof. Dr. O. SPIESS (Basel).

1. ED. GUILLAUME (Bern). — *Un nouvel algorithme: „les dérivées homogènes“ et une nouvelle opération spatiale l'„aberration“.*

Autoreferat wird im *Enseignement mathématique* erscheinen.

2. G. FERRI (Lugano). — *Linea dei punti brillanti di sfere concentriche.*

Punto luminoso  $A$ ; punto di vista  $A_1$ ; centro delle sfere  $O$ ; punto brillante (di riflessione)  $M$  nel loro piano.

Coordinate ortogonali coll'origine nel centro  $O$ . Asse  $Ox$  per il punto di mezzo della  $AA_1$ . Coordinate dei punti:  $A, p, q$ ;  $A_1, p_1 - q$  ( $p > p_1$ );  $M, x, y$ .

Coefficienti di direzione delle rette  $AM, \frac{y-q}{x-p}$ ;  $A_1M, \frac{y+q}{x-p_1}$ ;  $OM, \frac{y}{x}$ .

Il coefficiente di direzione della bisettrice dell'angolo  $AMA$  eguagliato a quello della  $OM$  conduce all'equazione della linea dei punti di riflessione;

$(p+p_1)(x^2+y^2)y - (p-p_1)(x^2-y^2)q - 2(q^2-pp_1)xy = 0$ .  
Questa linea passa per  $A$  e  $A_1$ ; poi due volte in  $O$ .

Il polinomio di terzo grado rispetto ad  $y$ , per un dato  $\pm x$  ammette tre valori d' $y$ ; dei quali uno sempre reale e positivo. La linea ha per *assintoto* la retta  $y_a = \frac{p-p_1}{p+p_1}q$  parallelo  $ox$ .

Il polinomio di secondo grado rispetto ad  $x$ ; per un dato  $\pm y$  ammette due valori di  $x$ ; però reali soltanto fin a quando

$$y \leq \frac{\pm \sqrt{(p^2+q^2)(p_1^2+q^2)}}{p+p_1}$$

Quando fosse  $OA = OA_1$  il polinomio ridotto è soddisfatto da  $y=0$  (asse  $ox$ ) e da  $x^2+y^2 - \frac{p^2+q^2}{p}x = 0$  (circonferenza col centro sulla  $ox$  e che passa in  $O$ ).

*Costruzione grafica della linea*, mediante le tangenti per  $A$  e per  $A_1$  a delle circonferenze concentriche in  $O$ . Per ogni circonferenza si hanno due coppie di tangenti ed i loro quattro punti d'intersecazione sono punti della linea.

*Punti brillanti di una sfera.* Si otterranno colle intersezioni della linea dei punti brillanti colla circonferenza della sfera nel piano dei punti  $A A_1 O$ ; cioè risolvendo le equazioni simultanee;

$(p + p_1)(x^2 + y^2)y - (p - p_1)(x^2 - y^2)q - 2(q^2 - pp_1)xy = 0$ ;  $x^2 + y^2 = r^2$ . Si giunge per  $x$  ed  $y$  a delle funzioni del quarto grado, quindi a 4 coppie di coordinate. Si noti però che due soltanto corrispondono ai punti di riflessione dei raggi fisici; l'uno sulla parte convessa, l'altra sulla parte concava della sfera. Gli altri due punti rispondono soltanto alla condizione geometrica della bisezione dell'angolo supplementare delle due rette per  $A$  ed  $A_1$ .

### 3. K. MERZ (Chur). — *Massgeometrie in Ovalen algebraischer Kurven.*

Das Innere eines Ovals werde durch eine quadratische Transformation als Bild der unbegrenzten Ebene bestimmt. In dieser Ebene gelte die euklidische Massgeometrie und die daraus entstehenden Masszahlen für Strecken und Bogen werden ihren Bildern im Oval zugeordnet. Damit entsteht im Innern des Ovals eine allgemein nichteuklidische Massgeometrie, die in der Ebene ihre Verwirklichung besitzt.

1. Beispiel<sup>1</sup>:  $f \equiv (x^2 - a^2)(x - b) - y^2$  enthält für  $f = 0$  ein Oval innert  $-a \leq x \leq +a$  wenn  $a < b$ . Durch die Transformation  $\xi^2 = x^2 : f$ ;  $\eta^2 = y^2 : f$  werden den Punkten  $P(xy)$  im Innern des Ovals die Punkte  $P'(\xi\eta)$  der Ebene zugeordnet. Den Koordinatenstrecken  $x, y$  von  $P$  als Abstände von den Achsen entsprechen in  $\xi, \eta$  ein Bogen  $u$  einer Kurve 3. Ordnung und ein Hyperbelbogen  $v$ , die zu berechnen sind aus

$$u = \int \frac{\sqrt{4f(f - xf_1) + (x^2 + y^2)f_1^2}}{4f^3} dx; v = \int \frac{\sqrt{4f(f - yf_2) + (x^2 + y^2)f_2^2}}{4f^3} dy$$

worin  $f_1 = \frac{f}{x}$  u.  $f_2 = \frac{f}{y}$ . Für das Linienelement  $du^2 + dv^2 - 2du \cdot dv \cdot \cos. \varphi$  ist noch  $\varphi$  zu entnehmen aus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2f[2f - xf_1 - yf_2]}{2f[xf_2 + yf_1] - (x^2 + y^2)f_1f_2}$$

Die geodätischen Linien im Oval sind Bogen von Kurven 3. Ordnung.

2. Beispiel:  $f \equiv (x^2 - a^2)(x^2 - b^2) - y^2$ ;  $a < b$ .

Die Massfunktion für Strecken im Oval ist durch Bogen von Kurven 4. Ordnung zu bestimmen.

### 4. L.-G. DU PASQUIER. (Neuchâtel). — *Sur un problème de cinématique.*

Un point mobile  $P$  parcourt une ellipse donnée  $l$  dite *ellipse génératrice*; simultanément, elle tourne dans son plan autour de l'un de ses foyers  $F$ . La trajectoire de  $P$  est alors une courbe plane dite „courbe  $gp$ “ dont l'auteur résume quelques propriétés frappantes. Soient, à l'instant  $t$  quelconque,  $x$  et  $y$  les coordonnées cartésiennes de  $P$  rapportées au système

<sup>1</sup> S. d. Beispiel in den Verhandlungen 1917, II., S. 135.

d'axes  $X O Y$  qui coïncide avec les axes de l'ellipse génératrice à l'instant  $t=0$ . Soient  $u=f(t)$  la fonction qui règle le mouvement de circulation du point  $P$  sur l'ellipse  $l$  supposée immobile, et  $\omega(t)$  la fonction qui règle le mouvement de rotation du grand axe de  $l$  autour du foyer fixe  $F$ . Désignant par  $2a$  et  $2b$  les longueurs des axes de l'ellipse  $l$  et par  $2c$  la distance de ses foyers, on trouve comme équations de la trajectoire :

$$\begin{aligned} x &= c - c \cdot \cos \omega(t) + a \cdot \cos f(t) \cdot \cos \omega(t) - b \cdot \sin f(t) \cdot \sin \omega(t) \\ y &= -c \cdot \sin \omega(t) + a \cdot \cos f(t) \cdot \sin \omega(t) + b \cdot \sin f(t) \cdot \cos \omega(t). \end{aligned}$$

En coordonnées polaires  $r, \Theta$ , le point fixe  $F$  étant le pôle, on trouve comme équation de la courbe  $gp$ :

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos F(\Theta)}, \quad \text{où } p = \frac{b^2}{a} \text{ est le demi-paramètre et } e = \frac{c}{a}$$

l'excentricité numérique de l'ellipse génératrice  $l$ . La fonction  $F(\Theta)$  dépend des fonctions  $f(t)$  et  $\omega(t)$  ci-dessus définies. Sous certaines hypothèses, on peut supposer le mouvement rotatoire uniforme sans restreindre par là la généralité. Il y a d'ailleurs lieu de distinguer deux cas, suivant que les 2 mouvements en question se font dans le même sens, ou en sens contraire.

Les courbes  $gp$  peuvent être engendrées cinématiquement encore de deux autres manières simples.

L'auteur mentionne la généralisation du problème à l'espace et étudie les cas où l'on obtient comme équation

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \frac{n \cdot \Theta}{n + 1}}$$

Il énumère une dizaine de propriétés de ces courbes, ainsi que 2 applications remarquables, l'une en cinématique pratique, l'autre en astronomie. Il existe un moyen très simple de les construire par points et 2 autres méthodes de les engendrer cinématiquement, permettant de les obtenir par un trait continu. L'auteur envisage spécialement une courbe  $gp$  du degré 25 077 602 et son application en astronomie. Ayant montré que les orbites réelles des planètes sont des courbes  $gp$ , il termine par une intéressante considération sur le centre du système solaire.

##### 5. A. SPEISER (Zürich). — *Ueber geodätische Linien.*

Betrachtet man die geodätischen Linien eines konvexen Körpers, ausgehend von einem Punkt, bis zur Enveloppe, so erzeugen sie eine Ueberlagerungsfläche, welche den Körper überall mindestens einfach überdeckt. Betrachtet man die Fortsetzung dieser Linien bis zur zweiten Enveloppe, so erhält man wiederum eine Ueberlagerungsfläche, welche unter gewissen Bedingungen den ganzen Körper überdeckt. Daraus folgt, dass es alsdann durch jeden Punkt des konvexen Körpers eine geodätische Linie gibt, welche nach einmaliger Berührung der Enveloppe in den Punkt zurückkehrt. Betrachtet man die Länge dieses Schleifens und sucht denjenigen Punkt, für welchen sie im Minimum ist, so ergibt

die „formule aux limites“ der Variationsrechnung, dass die Linie in sich zurückläuft, d. h. den Satz von Poincaré, dass der Körper mindestens eine geschlossene geodätische Linie enthält.

6. M. PLANCHEREL (Fribourg). — *Sur la méthode d'intégration de Rayleigh-Ritz.*

Le procédé de Rayleigh-Ritz (Rayleigh: Phil. Mag. (5) 47 (1899), p. 566—72 et (6) 22 (1911), p. 225—229; Ritz: Gött. Nachr. (1908), p. 236—48. J. reine angew. Math. 135 (1908) p. 1—61. Ann. d. Phys. (4) 28 (1909), p. 737—86. Oeuvres, p. 192—316) pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique qui résultent d'un problème du calcul des variations — prenons, pour fixer les idées, l'équation des plaques vibrantes  $\Delta \Delta u - \lambda u = 0$  — exprime la solution  $u = v + w$  au moyen d'une fonction connue  $v$  et d'une série  $w = \sum x_i \varphi_i$  procédant suivant un système de fonctions données  $\varphi_i$  (système que nous supposerons orthogonal, fermé et normé, ce qui ne restreint pas la généralité) et calcule les coefficients  $x_i$  comme solutions, au sens de la méthode des réduites, d'un système

$$\sum_k a_{ik} x_k - \lambda x_i = f_i \quad (1)$$

d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. La méthode de Ritz ne démontre la légitimité du procédé que dans le cas où  $\lambda \leq 0$ , lorsque la forme  $\sum a_{ik} x_i x_k$  est définie positive. En supposant connues l'existence et les propriétés des fonctions fondamentales de  $\Delta \Delta u - \lambda u = 0$ , il est cependant possible de prouver que le procédé de Ritz est applicable pour toute valeur de  $\lambda$  qui n'est pas une valeur fondamentale et qu'il permet de calculer valeurs et fonctions fondamentales par la résolution, au sens de la méthode des réduites, du système homogène correspondant à (1). La démonstration se base sur l'étude de la forme quadratique (non bornée)  $\sum a_{ik} x_i x_k$  et sur le fait que cette forme possède une résolvante unique qui elle est une forme K  $(\mu; x)$  bornée sauf pour les valeurs de  $\mu$  qui sont les inverses des valeurs fondamentales. Ainsi se trouve justifiée l'application qu'a faite Ritz de son procédé au calcul des vibrations transversales d'une plaque élastique à bords libres (figures de Chladni).

7. R. FUETER (Zürich). — *Einige Sätze der Idealtheorie und deren Beweismethoden.*

Der Betrachtung werde ein beliebiger *Galoisscher* Zahlkörper  $K$  zugrunde gelegt. *Hilbert* hat die Zerlegung jeder einzelnen Primzahl in Primideale in  $K$  studiert. Man kann diese Betrachtung vervollständigen, indem man statt von einer Primzahl auszugehen die Gesamtheit derselben betrachtet. Da nämlich  $K$  stets relativ-zyklisch zum Zerlegungskörper der zur Diskriminante teilerfremden Primzahlen ist, kann die von mir entwickelte Theorie *Abelscher* Gleichungen in einem Grundbereich verwendet werden. Grundlegend sind folgende Resultate: Es sei  $k$  der

Grundkörper,  $K$  der relativ-zyklische Oberkörper,  $f$  sei ein Ideal von  $k$ , das alle Primideale der Relativdiskriminante von  $K$  in bezug auf  $k$  enthält, und zwar einfach, wenn es zum Relativgrad teilerfremd, zu einer bestimmten Potenz, wenn es im Relativgrad enthalten ist. Mit  $f$  als Führer bilde man den *Strahl* in  $k$ . Dann gelten u. a. die Sätze:

**1. Satz:** *Alle Primideale einer Strahlklasse (mod.  $f$ ) in  $k$  zerfallen in  $K$  in gleicher Weise.*

Zwei Ideale von  $k$  heissen äquivalent (mod.  $f$ ), wenn ihr Quotient durch Multiplikation mit Einheiten von  $k$  zu einer Zahl  $a$  gemacht werden kann, die *total positiv* ist und der Bedingung genügt:

$$a \equiv 1 \pmod{f}$$

**2. Satz:** *Alle Ideale der Hauptstrahlklasse (mod.  $f$ ) zerfallen in  $K$  in so viele Primideale, als der Relativgrad beträgt.*

Ich greife aus der Diskriminante des gegebenen *Galoisschen* Körpers  $K$  alle Primzahlen heraus und bilde, wie oben, aus demselben den Führer  $f$ . Für alle nicht in  $f$  enthaltenen Primideale stimmt der Trägheitskörper mit dem Körper  $K$  überein. Letzterer ist relativ-zyklisch vom Grade  $n$  in bezug auf den Zerlegungskörper eines Primideals  $\mathfrak{p}$  (d. h. dessen Norm ist  $\mathfrak{p}^n$ ). Die Zerlegungsgruppe (Relativgruppe) sei  $1, z, z^2 \dots z^{n-1}$ . Aus den Folgerungen, die Satz 1 und 2 zulassen, greife ich folgende heraus:

Die Zerlegungsgruppe  $1, z, \dots z^{n-1}$  ist Untergruppe der Zerlegungsgruppe jedes Primideales des Zerlegungskörpers, das in letzterem dem Primideal  $\mathfrak{p}$  (mod.  $f$ ) äquivalent ist. Ist  $1, z, \dots z^{n-1}$  nicht Untergruppe einer zyklischen Untergruppe der *Galoisschen* Gruppe, so haben alle zu  $\mathfrak{p}$  (mod.  $f$ ) äquivalenten Primideale des Zerlegungskörpers letztern zum Zerlegungskörper. Ist  $n > 1$ , so ist  $\mathfrak{p}$  niemals Hauptideal (mod.  $f$ ) im Zerlegungskörper.

Nimmt man also umgekehrt irgend eine Untergruppe  $1, z, \dots z^{n-1}$  der *Galoisschen* Körpergruppe, die „die grösste“ ist, d. h. die nicht Untergruppe einer andern zyklischen Untergruppe ist, so bilde man den zu  $1, z, \dots z^{n-1}$  gehörigen Unterkörper  $k$ . Alle Primideale von  $k$ , die nicht ersten Grades sind, zerfallen in  $K$  in  $n$  Primideale. *Alle Primideale derselben Strahlklasse (mod.  $f$ ) in  $k$  besitzen denselben Zerlegungskörper.*

Die Beweise der Sätze 1 und 2 sind bisher noch nicht allgemein publiziert worden. Es können drei Methoden zum Ziele führen: Die *Furtwänglersche* Methode der Reziprozitätsgesetze, meine Methode der Klassenstrahlen und Einteilung in Geschlechter und die analytische Methode von *Hecke* mit Hilfe seiner Funktionalgleichung.

**8. S. BAYS (Fribourg).** — *Une question de Cayley relative au problème des triples de Steiner.*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Mathematical Papers I p. 481 ou Phil. Magazine 37 (1850) p. 50.

Voir aussi Netto Combinatorik p. 202—235 et partic. page 228.

Dans l'Enseignement Mathématique (n° 1/2, 1917), j'ai établi 2 solutions différentes du problème de Cayley pour 9 éléments. J'ai donné précisément en commençant la démonstration de Cayley pour 15 éléments, parce que intéressante et simple, sans songer à douter de la prétention sur laquelle elle repose.

Cayley a soulevé, relativement au problème des *triples* ou *triades* de Steiner, une question intéressante et difficile, jusqu'ici neuve encore de toute recherche : *Est-il possible de répartir les*  $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$  *triples de*  $N$  *éléments en*  $N-2$  *systèmes de Steiner ?*

Pour 7 éléments cette répartition n'est pas possible ; on peut écrire 2 systèmes de Steiner de 7 éléments, n'ayant pas de triples communs, mais pas davantage. Cayley s'est demandé si par exemple les 455 triples de 15 éléments pourraient être disposés en 13 systèmes de Steiner. Il a cru donner une démonstration très simple que si les 13 systèmes existent, (et Cayley dit en terminant qu'il ne le pense pas), ils ne peuvent pas se déduire de l'un d'entre eux par une permutation cyclique de 13 de ces éléments. Mais sa démonstration repose sur une prétention qui se trouve être entièrement fausse. Cayley prétend que dans ce rectangle des couples des 13 éléments 0, 1, 2, . . . ., 9, 0', 1' 2', disposés de la manière suivante :

|    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |      |      |     |
|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|-----|
| 01 | 12 | 23 | 34 | 45  | 56  | 67  | 78  | 89  | 90' | 0'1' | 1'2' | 2'0 |
| 02 | 13 | 24 | 35 | 46  | 57  | 68  | 79  | 80' | 91' | 0'2' | 1'0  | 2'1 |
| 03 | 14 | 25 | 36 | 47  | 58  | 69  | 70' | 81' | 92' | 0'0  | 1'1  | 2'2 |
| 04 | 15 | 26 | 37 | 48  | 59  | 60' | 71' | 82' | 90  | 0'1  | 1'2  | 2'3 |
| 05 | 16 | 27 | 38 | 49  | 50' | 61' | 72' | 80  | 91  | 0'2  | 1'3  | 2'4 |
| 06 | 17 | 28 | 39 | 40' | 51' | 62' | 70  | 81  | 92  | 0'3  | 1'4  | 2'5 |

il n'existe qu'un seul système de 6 couples, ayant un couple dans chaque ligne et renfermant les 12 éléments 1, 2, . . . 1', 2', à savoir le système suivant : 67, 2'1, 58, 1'2, 49, 0'3. Or il en existe 144 autres, remplissant les mêmes conditions ; ces systèmes vont par *couples* de systèmes que j'appellerai *conjugués*, déductibles l'un de l'autre par la substitution  $|x, N-x|$ . Le système  $1, N-1; 2, N-2; \dots; \frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}$

donné par Cayley, est le seul identique à son conjugué ou self-conjugué. Pour  $6n+3$  éléments, lorsque  $6n+1$  est un nombre premier, (cas de 15 éléments de la démonstration de Cayley), et pour  $6n+1$  éléments, lorsque  $6n-1$  est un nombre premier de la forme  $4x-1$ , je peux donner un système général de couples, remplissant les conditions demandées par Cayley, différent de son conjugué et donc autre que le système self-conjugué, au moyen d'une racine primitive  $\alpha$  de  $6n+1$ , resp. de  $6n-1$ . Pour 9 éléments, ce système avec son conjugué et le système self-conjugué, permettent de construire immédiatement le système de Steiner suivant : 780 713 726 745 815 823 846 016 025 034 124 356 que la substitution cyclique (0123456) transforme successivement en 6 autres systèmes de Steiner différents par tous les triples, et renfermant donc avec le premier les 84 triples de 9 éléments.

Le manque de place ne me permet pas de développer davantage la question ; mais le problème de Cayley : *Répartir les*  $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$

*triples de N éléments en N—2 systèmes de Steiner, ou en d'autres termes: Trouver N—2 systèmes de Steiner de N éléments différents par tous les triples, me paraît se poser au contraire d'une manière positive pour  $N=6n+1$  et  $N=6n+3$  éléments,  $N=7$  étant probablement le seul cas pour lequel il manque de solution.*

**9. L. CRELIER (Berne).** — *Interprétation géométrique rationnelle des quantités imaginaires.*

1. Toutes les opérations de la géométrie analytique à deux dimensions supposent que nous travaillons sur l'endroit du plan fondamental.

Si nous introduisons le concept de l'envers du plan, nous aurons, avec un axe commun, celui des  $x$  par exemple, de nouvelles ordonnées qui correspondent aux valeurs  $+\sqrt{-1}$  et  $-\sqrt{-1}$  ou  $+i$  et  $-i$ .

2. Considérons maintenant une équation algébrique, p. ex.  $x^2 + y^2 = 16$ . A toutes les valeurs de  $x$  correspondent des valeurs de  $y$ ; entre  $-4$  et  $+4$  elles viennent sur l'endroit et forment un cercle; entre  $-\infty$  et  $-\frac{4}{5}$  puis entre  $+\frac{4}{5}$  et  $+\infty$  elles viennent sur l'envers et forment une hyperbole équilatère également comprise dans l'équation.

3. Recherchons les points de coupe de la droite  $x = 5$  avec la courbe  $x^2 + y^2 = 16$ . Nous trouvons  $(5, +3i)$  et  $(5, -3i)$ . Comme la droite est également représentable sur l'envers, les points de coupe sont sur l'envers, sur l'hyperbole.

4. Passons aux points de coupe de la même courbe avec la droite  $y = 2x - 16$ . Nous trouvons  $x = \frac{32}{5} \pm \frac{4}{5}\sqrt{11i}$  et  $y = -\frac{16}{5} \pm \frac{8}{5}\sqrt{11i}$ . Pour trouver les images de ces points nous avons deux moyens:

a) Nous prenons comme nouvel axe des  $x$  le diamètre perpendiculaire à la droite; l'équation de la courbe ne change pas; celle de la droite devient  $x = \frac{16}{5}\sqrt{5}$ . D'après le raisonnement précédent nous trouvons les deux points de coupe sur l'envers du plan et sur l'hyperbole correspondante.

b) Ou bien nous déplaçons les axes jusqu'en  $(\frac{32}{5}, -\frac{16}{5})$  comme nouvelle origine et sur l'envers, à cause du déplacement des deux axes, nous avons les coordonnées  $\pm \frac{4}{5}\sqrt{11i}$  et  $\pm \frac{8}{5}\sqrt{11i}$  ou les points

$$\left(\frac{4}{5}\sqrt{11i}, \frac{8}{5}\sqrt{11i}\right) \text{ et } \left(-\frac{4}{5}\sqrt{11i}, -\frac{8}{5}\sqrt{11i}\right).$$

5. On peut opérer de la même manière avec une conique quelconque et nous arrivons aux conclusions suivantes:

a) *Les points de coupe d'une conique avec une droite extérieure sont les intersections de la droite sur l'envers du plan avec la conique associée*

qui admet la direction de la droite comme diamètre conjugué secondaire. Le diamètre principal sert d'axe réel commun aux deux faces du plan.

b) Les valeurs analytiques  $x = a \pm bi$  et  $y = c \pm di$  trouvées comme solutions correspondent aux mêmes points;  $a$  et  $c$  sont les coordonnées de la nouvelle origine, sur le centre du segment de droite entre les points de coupe;  $b$  et  $-b$  sont les abscisses tandis que  $c$  et  $-c$  sont les ordonnées de ces points sur l'envers du plan fondamental.

10. G. POLYA (Zürich). — *Das wahrscheinlichkeitstheoretische Schema der Irrfahrt.*

Stellen wir uns sämtliche Gitterpunkte eines Raumes von  $d$  Dimensionen vor und ihre sämtlichen Verbindungsgeraden, die einer der  $d$  rechtwinkligen Koordinatenachsen parallel sind. An dem entstehenden Geradennetz soll ein Punkt auf Geratewohl herumfahren. D. h. an jeden neuen Knotenpunkt angelangt, soll er sich mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2d}$  für eine der möglichen  $2d$  Richtungen entscheiden. Für  $d = 1$  haben wir eine in gleiche Segmente geteilte unbegrenzte Gerade und die geometrische Darstellung des „Wappen- oder Schrift“-Spiels vor uns, für  $d = 2$  die Irrfahrt eines Spaziergängers in einem Strassennetz, für  $d = 3$  die Irrfahrt einer Molekül, die in einem Kristall des regulären Systems diffundiert.

An dieses Schema der Irrfahrt und an naheliegende Modifikationen davon lassen sich die wichtigsten bekannten Probleme und Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung anschaulich anschliessen. Von den mannigfaltigen neuen diesbezüglichen Problemen sei hier nur eins erwähnt. Zwei auf die beschriebene Weise mit gleicher Geschwindigkeit aber unabhängig voneinander herumirrende Punkte sind von dem gleichen Knotenpunkt aufgebrochen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie sich in Zeitraum  $t$  wiederfinden, nimmt mit  $t$  zu. Strebt sie für  $t = \infty$  der Sicherheit zu? Ja, für  $d = 1, 2$ , nicht, für  $d = 3, 4, 5, \dots$

11. W. H. YOUNG (Lausanne et Aberystwyth). — *Sur la notion de l'aire.*

Plusieurs mathématiciens de notre temps ont essayé de mettre au clair la notion de l'aire d'une surface courbe, mais avec peu de succès. L'auteur a construit une théorie qui s'applique non seulement aux surfaces, mais aux variétés de n'importe quelles dimensions. La théorie est fondée sur l'idée de *l'aire d'une courbe gauche*. L'aire d'un polygone est la somme des moments de forces, représentées par les côtés du polygone. Dans une courbe on inscrit un polygone, ayant tous ses côtés inférieurs en longueur à  $\delta$ : si, en faisant  $\delta$  tendre vers zéro, l'aire du polygone tend vers une limite unique, celle-ci est *l'aire de la courbe*. Avec cette définition, par exemple, chaque courbe rectifiable plane possède une aire, donnée par la formule

$$A = \frac{1}{2} \int \left\{ x(u) dy(u) - y(u) dx(u) \right\}$$

Si notre courbe est l'image du périmètre du rectangle  $(a, b; a', b')$  dans une correspondance continue

$$x = x(u, v), y = y(u, v), (a \leq x \leq a'), (b \leq y \leq b'),$$

le problème se pose de transformer l'expression obtenue dans l'intégrale double bien connue

$$A = \int_a^{a'} \int_b^{b'} \frac{d(x, y)}{d(u, v)} du dv.$$

Prenons maintenant une correspondance continue et biunivoque

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$$

et divisons le rectangle fondamental en rectangles partiels, dont les côtés, parallèles à  $u = 0, v = 0$ , ne dépassent pas  $\delta$  en longueur.

Ayant formé la somme  $\sum \delta$  des aires des courbes images de ces rectangles partiels, nous laissons  $\delta$  tendre vers zéro. Si  $\sum \delta$  a une limite unique  $\sum$ , celle-ci est l'aire de la partie de la surface, image biunivoque du rectangle fondamental.

Le théorème principal obtenu est le suivant: Si  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  sont des intégrales par rapport à  $u$ , ayant des dérivées partielles par rapport à  $u$  qui sont, sauf pour un ensemble de valeurs de  $u$  de mesure nulle, toutes inférieures à une fonction sommable de  $u$ , et si la même chose est vraie quand nous changeons  $u$  en  $v$  et  $v$  en  $u$ , la surface image du rectangle fondamental a une aire  $A$  donnée par la formule

$$A = \int_a^{a'} \int_b^{b'} \sqrt{\left(\frac{d(y, z)}{d(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{d(z, x)}{d(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{d(x, y)}{d(u, v)}\right)^2} du dv$$

Dans certaines conditions l'auteur arrive au même but par une méthode de triangulation. Il faut cependant introduire explicitement l'ordre double de la surface, de même que dans l'approximation de la longueur d'une courbe, il est nécessaire de tenir compte du sens de cette courbe. Notre triangulation est obtenue en joignant convenablement par des lignes droites les points de la surface images des sommets des rectangles partiels de longueur  $\leq \bar{h}$  et de hauteur  $\leq \bar{k}$  dans le plan des  $(u, v)$ . Pour calculer l'aire nous laissons d'abord  $k$  et puis  $h$  tendre vers zéro, et nous obtiendrons le résultat voulu dans certains cas intéressants. Sans donner les conditions les plus générales, nous remarquons que, si  $x(u, v), y(u, v)$  et  $z(u, v)$  sont des intégrales doubles, cette méthode est valable, d'autant plus que la limite obtenue est dans ce cas indépendante de la manière dont  $\bar{k}$  et  $\bar{h}$  tendent vers zéro.