

Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft =
Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della
Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 105 (1924)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Donnerstag, den 2. Oktober 1924

Präsident: Prof. Dr. A. SPEISER (Zürich)

Aktuar: Prof. Dr. S. BAYS (Freiburg)

1. A. HEYER (St. Gallen). — *Über einige geometrische Örter an Kegelschnitten.*

I. Gesucht ist der geometrische Ort des Höhenschnittpunktes des Dreiecks, welches bestimmt ist durch einen Hauptscheitel, den zugehörigen Fokus und einen beliebigen Ellipsenpunkt.

Wenn der Fokus als Ursprung genommen wird, lautet die Gleichung:

$$y = \pm \frac{ax}{b} \sqrt{\frac{x+a-c}{a+c-x}}$$

Lässt man die Ellipse in einen Kreis übergehen, indem man $b = a$ und $c = 0$ setzt, so wird

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

(Gerade Strophoide. Siehe Loria Bd. I, S. 63, 2. Fussnote.).

Für die Parabel lautet die Gleichung:

$$y = \pm \frac{x}{2} \sqrt{\frac{2x+p}{p}}$$

II. Die Endpunkte einer Fokusschne einer Ellipse seien mit dem zugehörigen Scheitel verbunden. In dem so entstandenen Dreieck seien die Höhen gezogen. Gesucht ist der geometrische Ort des Höhenschnittpunktes.

Man erhält eine Ellipse, welche mit der gegebenen ähnlich ist und die mit ihrem Nebenscheitel die gegebene Ellipse im Hauptscheitel von aussen berührt. Die Halbachsen der gefundenen Ellipse sind:

$$\text{Grosse Halbachse} = e \frac{(a-c)(2a+c)}{2b}$$

$$\text{Kleine Halbachse} = e \frac{(a-c)(2a+c)}{2a}$$

Für die Parabel degeneriert die Ellipse in zwei parallele, zur Achse senkrechte Geraden

$$x = 0 \text{ und } x = -\frac{3p}{2},$$

bezogen auf den Scheitel als Ursprung.

III. In den Endpunkten einer Fokussehne einer Ellipse sind die Parallelen zu den Achsen gezogen. Gesucht ist der geometrische Ort der beiden andern Ecken des so entstandenen Rechtecks:

$$y = \pm \frac{b^3 \sqrt{a^2 - x^2}}{a(a^2 + c^2 - 2cx)}$$

Der Maximalpunkt hat die Koordinaten

$$x_{\max} = \frac{2a^2c}{a^2 + c^2}, \quad y_{\max} = b$$

Die gefundene Kurve und die Ellipse schneiden sich in den Endpunkten des Parameters, und zwar so, dass die dort angelegten Tangenten entgegengesetzte Richtungskoeffizienten besitzen. Sie schneiden sich unter einem Winkel, dessen $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2ac}{b^2}$ ist.

Für die Hyperbel lautet derselbe Ort:

$$y = \pm \frac{b^3 \sqrt{x^2 - a^2}}{a(a^2 + c^2 - 2cx)}$$

Die Kurve besteht aus vier getrennten Stücken mit drei Asymptoten. Die Gleichungen der letzteren lauten:

$$x = \frac{a^2 + c^2}{2c} \quad \text{und} \quad y = \pm \frac{b^3}{2ac}$$

Für die Parabel lautet die Gleichung:

$$y = \sqrt{\frac{p^3}{2x}} \quad (\text{kubische Hyperbel}).$$

Diese Kurve schneidet die Parabel senkrecht.

2. L.-G. DU PASQUIER (Neuchâtel). — *Une classe particulière d'équations différentielles d'ordre quelconque.*

Certaines recherches sur les équations différentielles conduisent au problème suivant: quand on sait qu'une fonction $u(x)$ satisfait à une équation différentielle donnée, trouver à quelle équation différentielle satisfait une fonction $y(x)$ qui, en plus des singularités de u , a encore p pôles simples ou multiples aux points $b_1, b_2, \dots, b_p$ du plan complexe, distincts ou non. Par une méthode qui s'applique à des cas beaucoup plus généraux, l'auteur démontre la proposition suivante. Supposons que $u(x)$ soit l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$u^{(n)}(x) = \alpha \cdot u + \alpha_1 \cdot u' + \alpha_2 \cdot u'' + \dots + \alpha_k \cdot u^{(k)} \quad (1)$$

où les $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, représentent des fonctions dérivables de x , d'ailleurs quelconques et pouvant se réduire à des constantes et où le nombre naturel k est inférieur à n . La nouvelle fonction

$$y = \frac{u(x)}{(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_p)}$$

En général, à un point P correspond un et un seul point P' , mais il existe des points singuliers situés sur le tétraèdre : les quatre sommets et les points des arêtes.

Il est facile de vérifier que *toute quadrique passant par les quatre sommets du tétraèdre fondamental est transformée en une quadrique passant par ces mêmes quatre points.*

Ces quadriques forment naturellement un système linéaire de dimension cinq, qui est transformé en lui-même par la transformation cubique définie plus haut.

Cinq étant justement la dimension du système linéaire de toutes les coniques d'un plan, il est naturel de couper ce système de quadriques par un plan arbitraire π et d'étudier les coniques obtenues par cette intersection.

Nous dirons que deux coniques de π sont correspondantes, si elles proviennent de deux quadriques transformées l'une de l'autre.

Ainsi est donc définie, dans un plan π arbitraire, une transformation de coniques en coniques, l'élément de la transformation étant la conique et non les points de cette conique.

Cette transformation peut être nommée : Transformation par poloconiques réciproques suivant une certaine cubique C_3 . Elle fait correspondre à toute conique sa poloconique par rapport à une courbe du troisième ordre.

La poloconique, elle, est définie comme suit : *Le lieu des pôles des coniques polaires qui, étant considérées comme coniques de seconde classe, sont apolaires à une conique fixe arbitraire C_2 de second ordre, est une conique C'_2 nommée la poloconique de la conique fixe C_2 .*

Cette représentation géométrique de la transformation par poloconiques, intéressante en elle-même, apparaît en outre comme très féconde : elle permet de vérifier promptement les propriétés connues des poloconiques et de déduire quelques nouvelles propriétés.

(Voir Démonstrations et applications : Transformation par poloconiques et généralisation. Chapitre II et III. Thèse Ecole polytechnique fédérale, Zurich 1924.)

4. G. JUVET (Neuchâtel). — *Sur les géométries différentielles.*

On sait que la notion de déplacement parallèle due à M. Levi-Civita¹ a été généralisée par MM. Weyl,² Eddington³ et Schouten.⁴ La généralisation de M. Schouten comprend d'ailleurs tous les autres cas. Nous avons obtenu en 1921 des formules qui correspondent aux formules de Frenet et cela pour la géométrie de M. Weyl.⁵ Cette année-ci, nous avons donné les formules de Frenet pour la géométrie différentielle la plus générale, celle qui correspond au déplacement de M. Schou-

¹ LEVI-CIVITA : *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, 1917.

² WEYL : *Raum, Zeit, Materie*. 5^e éd., p. 122.

³ EDDINGTON : *The mathematical Theory of Relativity*, p. 214.

⁴ SCHOUTEN : *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 13, 1922.

⁵ JUVET : *C. R. Ac. des Sc.*, Paris 1921 (1^{er} semestre).

ten.¹ Dans son livre récemment paru, M. Schouten² fait remarquer que les formules que j'ai obtenues pour la géométrie de Weyl, ne correspondent pas à la géométrie la plus générale de Weyl, mais à une particularisation de celle-ci, qu'on obtient en fixant le tenseur métrique g_{ik} . Cette remarque vaut aussi pour les formules de Frenet relatives à la géométrie de Schouten. Il convient tout d'abord de répondre à cela par le fait suivant: les formules de Frenet que je cherchais n'ont de sens que pour autant que la métrique est déterminée; de plus leur but est de donner un sens géométrique aux formules du déplacement parallèle en faisant voir comment un n -èdre attaché à une courbe se déplace le long de cette courbe; c'est là, nous semble-t-il, un des premiers problèmes de la géométrie différentielle. Cependant, si l'on arrive à des formules qui sont invariantes pour les transformations de coordonnées, on peut se demander comment elles seront altérées lorsqu'on changera la métrique.

C'est de quoi nous nous occuperons ici, mais seulement pour le cas, relativement simple, de la géométrie de M. Weyl. On sait que pour une telle géométrie les g_{ik} ne sont définis qu'à un facteur λ près; λ étant une fonction de point dans la variété considérée.

Rappelons ce que nous avons obtenu avec une métrique déterminée et donnée par les coefficients g_{ik} de la forme quadratique et par les coefficients φ_i de la forme linéaire de M. Weyl. A chaque point d'une courbe $x_i = x_i(s)$, on attache un n -èdre orthogonal et normé, on passe de l'un de ces n -èdres à celui qui est infiniment voisin par une suite de trois opérations:

1° On déplace le n -èdre parallèlement à lui-même.

2° On lui fait subir une rotation dont les composantes sont au signe près, les courbures $\frac{1}{\varrho(p)}$ ($p = 1, 2 \dots n - 1$) de la courbe au point considéré.

3° On lui fait subir une homothétie de rapport $h = 1 + \frac{\sum \varphi_i dx}{2}$.

Cela étant, le corps de vecteurs attaché au premier point est venu s'appliquer sur le corps de vecteurs attaché au point voisin, les vecteurs du premier corps étant venus se confondre avec ceux du second qui ont les mêmes composantes. Ces nombres $\varrho(p)$ et h sont des invariants pour tous les changements de coordonnées; qu'arrive-t-il si l'on change

g_{ik} en $\bar{g}_{ik} = \lambda g_{ik}$? On sait que φ_i se change en $\bar{\varphi}_i = \varphi_i - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$.

Les deux points P et P' correspondent à des valeurs de s différant de $d\bar{s} = \lambda ds$. Le déplacement parallèle d'un vecteur de P en P' s'exprime par des formules qui font intervenir λ ; les $\bar{\varrho}_{(i)}$ sont aussi dépendants de λ ; on trouve après d'assez longs calculs:

¹ JUVET: *C. R. Ac. des Sc.*, Paris 1924 (1^{er} semestre); et *Bulletin de la Soc. Math. de France* (sous presse).

² SCHOUTEN: *Der Ricci-Kalkül*, p. 236.

$$\bar{\varrho}_{(i)} = \sqrt{\lambda} \varrho_{(i)}$$

et l'on a bien évidemment pour le rapport d'homothétie $\bar{h}$:

$$\bar{h} = 1 + \frac{1}{2} \sum \left(\varphi_i - \frac{1}{\lambda} \frac{\delta \lambda}{\delta x_i} \right) dx_i = h - \frac{1}{2} \sum \frac{1}{\lambda} \frac{\delta \lambda}{\delta x_i} dx_i.$$

ou
$$\bar{h} = h - d \log \sqrt{\lambda}.$$

En résumé, h et les $\varrho_{(i)}$ sont des invariants pour les transformations de coordonnées; mais lorsqu'on change de métrique, en multipliant les g_{ik} par λ , les $\varrho_{(i)}$ sont multipliés par $\sqrt{\lambda}$ et h est diminué de $d \log \sqrt{\lambda}$. On peut dire encore que les invariants de la courbe vis-à-vis de toute transformation, et des coordonnées, et de la métrique, sont les rapports

$$\varrho_{(1)} : \varrho_{(2)} : \dots : \varrho_{(n-1)}.$$

5. H. BRANDT (Aachen). — *Über die Komposition der quaternären quadratischen Formen.*

Es wird der Begriff der Komposition für die quaternären quadratischen Formen definiert. Unter Beschränkung auf den Fall primitiver Formen gleicher Diskriminante werden dann die beiden Fundamentalprobleme erörtert: 1. zu entscheiden, ob zwei Formen A und B komponiert werden können, 2. wenn das der Fall ist, alle daraus komponierten Formen anzugeben.

Das erste Problem wird durch den Satz gelöst: A und B sind in dieser Reihenfolge dann und nur dann komponierbar, wenn die der Form A rechts zugehörige Hauptklasse mit der der Form B links zugehörigen identisch ist.

Die Lösung des zweiten Problems führt auf ein quadratisches Schema von Klassen, welches in einer Diagonale die Hauptklassen enthält, während Felder, die spiegelbildlich zu dieser Diagonale stehen, entweder dieselbe ambige Klasse oder zwei entgegengesetzte Klassen enthalten. Alle Klassen einer Zeile haben dieselbe rechts zugehörige, alle Klassen einer Spalte dieselbe links zugehörige Hauptklasse. Wählt man irgendwie zwei Felder so aus, dass die Zeile des ersten und die Spalte des zweiten sich in einem Hauptklassenfeld treffen, so ist aus den betreffenden Klassen in der genannten Reihenfolge diejenige Klasse komponiert, welche sich in dem Feld befindet, wo sich die Spalte des ersten und die Zeile des zweiten Feldes treffen.

6. G. HUNZIKER (Reinach). — *Über das Kartenfärbungsproblem.*

Vom sogenannten geographischen Vierfarbensatz konnte bisher nur bewiesen werden, dass vier Farben notwendig sind; ob auch hinreichend, ist nicht bewiesen, sondern dies ist erst für fünf Farben der Fall.

Zunächst arbeitete ich nun ein Verfahren aus (dasselbe ist, wie alles Folgende, in meiner bei Leemann & Co. in Zürich, 1924, erschienenen Dissertation näher ausgeführt), mit dem für vorgelegte Karten systematisch untersucht werden kann, ob es wirklich Vierfärbungen gibt und

welche. Dasselbe bringt zugleich eine gewisse Ordnung in die sonst fast unübersehbare Mannigfaltigkeit aller möglichen Färbungen.

Dann suchte ich die oben genannten, von unzusammenhängenden Gesichtspunkten aus gewonnenen Resultate einheitlich abzuleiten, was auch gelang auf Grund einer Funktion $e_1 = f(e_2)$, worin e_1 die Anzahl der Grenzlinsen und e_2 die der Staaten bedeutet. Nimmt man Bezug auf Karten, in denen möglichst viele Staaten Nachbarn sind, so findet man dafür $e_1 = 3e_2 - 6$; d. h. die Anzahl der Benachbarungen wächst um 3, wenn die der Staaten um 1. Deshalb müssen bei dem erwähnten systematischen Vierfärbungsverfahren bei jedem Staat normalerweise nur 3 Nachbarn berücksichtigt werden, sodass 4 Farben hinreichend zu sein scheinen. Müssen aber doch einmal mehr als 3 Farben in Betracht gezogen werden, so mussten es vorher entsprechend weniger als 3 sein. Und da man es einrichten kann, dass es nie weniger als 2 sind, musste man gerade so oft die Möglichkeit haben, zwischen zwei Farben zu wählen. Es gilt nun nachzuweisen, dass dadurch mehr Färbungsmöglichkeiten entstehen, als sich nachher als in Wirklichkeit unmöglich herausstellen können. Ein Anfang dazu ist gemacht. Im allgemeinen Fall jedoch ist diese Idee noch nicht übersichtlich genug durchzuführen, um überzeugend zu sein.

Für Flächen von höherem Geschlecht ist der Kern des Vierfarbensatzes, nämlich der Satz, dass jeweils so viele Farben notwendig und hinreichend seien, als Staaten auf der betreffenden Fläche alle unter einander Nachbarn sein können, leicht zu beweisen, weil hier die grösstmögliche Anzahl solcher Nachbarn gleich oder grösser ist als die um 1 vermehrte durchschnittliche Nachbarnzahl. (Nur weil dies bei der Kugelfläche nicht der Fall ist, verlangt dieser scheinbar einfachste Fall tatsächlich doch das tiefste Eingehen auf das Problem.)

Dieser verallgemeinerte „Vier“farbensatz ist auch in allen andern erledigten Fällen zutreffend und wird um so wahrscheinlicher auch für die Kugelfläche gelten.

7. L. CRELIER (Berne). — *Sur quelques équations intégrales simples.*

Nous avons étudié avec une de nos élèves, M^{lle} Dr A. von Fischer, les équations intégrales simples suivantes:

Equations de

$$\text{Volterra: } 1. \quad \varphi(x) = q + px + \lambda \int_0^x (ax + bs) \varphi(s) ds$$

$$2. \quad \varphi(x) = q + px + \lambda \int_0^x (ax^2 + bs^2) \varphi(s) ds$$

$$3. \quad \varphi(x) = q + px + \lambda \int_0^x (ax^2 + bxs + cs^2) \varphi(s) ds$$

$$4. \quad \varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^x e^{x+s} \varphi(s) ds$$

$$5. \quad \varphi(x) = 1 + 3x + \lambda \int_0^x e^{x-s} \varphi(s) ds$$

Equations de

Fredholm: $6. \quad \varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (ax + bs) \varphi(s) ds$

$$7. \quad \varphi(x) = q + px + \lambda \int_0^1 (ax^2 + bs^2 + c) \varphi(s) ds$$

$$8. \quad \varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 e^{x+s} \varphi(s) ds$$

$$9. \quad \varphi(x) = 1 + 3x + \lambda \int_0^1 e^{x-s} \varphi(s) ds$$

$$10. \quad \varphi(x) = 1 + 2x + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos s \cdot \varphi(s) ds$$

Ces équations se prêtent facilement à l'application de la méthode des approximations successives et permettent ensuite de calculer les noyaux itérés $K^{(n)}(x, s)$ et la résolvante $F(x, s; \lambda)$.

Les équations de Fredholm donnent ensuite des fonctions $D(\lambda)$ et $D\left(\frac{x}{s}/\lambda\right)$ faciles à calculer. D'une manière générale de tels exemples permettent de suivre pas à pas les développements parfois difficiles de la théorie des équations intégrales.

8. S. BAYS (Fribourg). — *Sur le nombre des systèmes cycliques différents de triples de Steiner pour $N = 6n + 1$ premier (ou puissance de nombre premier).*

Soient les N éléments $0, 1, 2, \dots, N-1$, N étant de la forme $6n + 1$ et premier (ou puissance de nombre premier). Le groupe métacyclique est l'ensemble des permutations $|x, a + ax|$, où $a = 0, 1, 2, \dots, N-1$ et a parcourt les $\varphi(N)$ entiers premiers avec N . Il est engendré par les permutations $|x, 1 + x|$ et $|x, ax|$, où a est une racine primitive de N ; il se note par suite $\{|x, 1 + x|, |x, ax|\}$.

Un système cyclique de triples de Steiner possède le groupe cyclique $\{|x, 1 + x|\}$, ou un autre sous-groupe plus étendu du groupe méta-

cyclique. Deux systèmes cycliques équivalents sont déductibles l'un de l'autre par une permutation métacyclique. Cette proposition, importante dans notre recherche et que nous avons dû admettre sans démonstration dans deux mémoires précédents¹, en faisant naturellement la réserve qu'elle restait à établir, est maintenant démontrée par M. P. Lambossy. Par suite les résultats des deux mémoires indiqués sont maintenant *définitifs*, de sorte que nous avons jusqu'ici :

- 1° le nombre des systèmes cycliques *différents* de triples de Steiner pour les premières valeurs de $N = 6n + 1$ jusqu'à $N = 43$;
- 2° théoriquement une méthode pour obtenir *tous* les systèmes cycliques *différents* pour $N = 6n + 1$ premier (ou puissance de nombre premier); pratiquement son application à $N = 49, 61$ ou 67 demanderait déjà un temps considérable;
- 3° une borne inférieure, et une borne supérieure du même ordre de grandeur, du nombre des *systèmes de caractéristiques différents* d'une certaine classe (les systèmes de caractéristiques différents sont les souches de familles de systèmes cycliques différents avec symétrie propre). Ces deux bornes sont des sommes constituées de la même façon d'expressions semblables, expressions dont nous ne donnerons que la première et la plus simple :

pour la borne inférieure :

$$(n-2) \left\{ 1 + \frac{n-7}{2} + \frac{(n-7)(n-14)}{2 \cdot 3} + \frac{(n-7)(n-14)(n-21)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right\}$$

pour la borne supérieure :

$$(n-2) \left\{ 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right\}$$

Chacun de ces systèmes de caractéristiques, dont nous connaissons non seulement le nombre approché, mais que nous sommes à même de donner d'une façon presque immédiate, dès que nous avons une racine primitive de N , détermine au moins $\left[\frac{2^n - 1}{3} \right]$ systèmes cycliques *différents* de triples de Steiner, systèmes qui possèdent uniquement le groupe cyclique $\{|x, 1 + x|\}$ ou le sous-groupe métacyclique $\{|x, 1 + x|, |x, \alpha^{2^n} x|\}$ et que nous sommes à même aussi, ayant le système de caractéristiques, de donner d'une façon immédiate.

¹ L'un a paru dans le *Journ. de math. pures et appliquées*, t. 2, 1923, fasc. 1, p. 73 à 98. L'autre paraîtra prochainement dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*. Ses résultats sont contenus en partie dans une Note aux *Comptes-Rendus Acad. Sc. Paris*, t. 175, p. 936, séance du 20 novembre 1922.