1. Section de Mathématiques

Séance de la Société suisse de Mathématiques

Vendredi, 31 août 1928

Président et *secrétaire:* Prof. Dr G. Juvet (Neuchâtel), vice-président

1. L. Kollros (Zurich). — *Généralisations de théorèmes de Steiner et de Clifford.*

I. 4 droites d'un plan, prises 3 à 3, forment 4 triangles tels que les cercles circonscrits passent par un même point F.

II. Les centres de ces 4 cercles sont, avec F, sur un 5e cercle γ (Steiner, Werke I, p. 223). On peut démontrer et généraliser ces 2 théorèmes de plusieurs manières: 1. Le lieu des foyers des paraboles touchant 3 droites est le cercle circonscrit au triangle; les 4 cercles se coupent donc au foyer F de la parabole tangente aux 4 droites. Le lieu des foyers des paraboles de n^e classe p_n tangentes à $(2n-1)$ droites et touchant $(n-1)$ fois la droite à l'infini est un cercle; $2n$ droites donnent lieu à $2n$ cercles se coupant au foyer unique de la p_n tangente aux $2n$ droites (Clifford, Math. Papers, p. 38). 2. Les cubiques planes passant par les 6 sommets d'un quadrilatère complet et par les points cycliques I, K ont encore un 9e point commun[1] F; 4 cubiques dégénèrent en une droite et un cercle; les 4 cercles passent donc par F. Les tangentes en I et K à toutes les cubiques forment 2 faisceaux projectifs; ils engendrent le cercle γ (théor. II); soit O_4 son centre; à 5 droites, prises 4 à 4, correspondent 5 points O_4; ils sont sur un cercle de centre O_5; 6 droites, prises 5 à 5 donnent 6 points O_5 d'un nouveau cercle, et ainsi de suite. 3. Si l'on projette un quadrilatère complet stéréographiquement sur une sphère, les plans qui correspondent aux 4 triangles passent par un même point F' de la sphère. Il existe un théorème analogue dans tout espace de dimension impaire; une projection stéréographique donne la généralisation du théorème I dans les espaces de dimensions paires. 4. Des plans quelconques menés par les 4 droites forment un tétraèdre $ABCD$; la cubique gauche c_3 passant par les 6 points $ABCDIK$ coupe le plan π du quadrilatère en un 3e point F; c_3 projetée à partir de A,

---

[1] Si l'on a n points et $(n+2)$ droites dans un plan, les courbes d'ordre $(n+1)$ passant par ces n points et par les points d'intersection des droites ont encore $\frac{n(n-1)}{2}$ points communs.

de B, C et D sur π donne les 4 cercles se coupant en F; soient a, b, c, d leurs centres, i et k les tangentes à c_3 en I et K; Aa, Bb, Cc, Dd, coupant i et k, sont des génératrices de la quadrique q contenant c_3, i et k; q coupe donc π en un cercle γ par $abcd\,F$. Si O_4 est l'intersection des plans tangents à q en I et K, 5 plans, pris 4 à 4, donnent 5 droites O_4; elle sont sur une quadrique q_5 passant par I et K; les plans tangents à q_5 en I et K se coupant en O_5, 6 plans, pris 5 à 5, donnent 6 droites O_5 d'une quadrique q_6 par I et K, etc. White (Camb. Phil. Proc. 1925) généralise le théorème de Clifford ainsi: 2 points I, K et 5 plans, pris 4 à 4, déterminent 5 c_3 qui ont encore 2 points communs; 6 plans donnent 6 groupes de 2 points; ils sont sur une c_5 passant 2 fois par I et K; 7 plans donnent $7 c_5$ ayant 3 points communs, etc. Grace (id. 1928) démontre que si l'on a un nombre quelconque de droites dans un plan et 3 points $I\,K\,L$ dans l'espace, 3 droites déterminent une c_3 par $I\,K\,L$ et les sommets du triangle; 4 droites donnent 4 c_3 ayant un point commun F_4; 5 droites donnent 5 points F_4 sur une c_3 par $I\,K\,L$; 6 droites donnent 6 c_3 passant par un point F_6, etc. Il y a des théorèmes analogues dans un espace de dimension quelconque.

2. M^lle^ M. L. Sarasin (Zürich). — *Über Quaternionensubstitutionen und Quaternionengruppen.*

Den folgenden Untersuchungen liegt zugrunde ein spezielles System hyperkomplexer Zahlen, das der Hamiltonschen Quaternionen. Bezeichnet z die Quaternionenvariable, $\bar{z}$ ihre Konjugierte, so lautet die Gleichung einer Hyperkugel:

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{z}\bar{B} + C = 0. \quad A,\ C \text{ reelle Konst.} \quad B \text{ ein Quat.}$$

Es werden alle linearen ganzen und gebrochenen Quaternionensubstitutionen aufgestellt, die den vierdimensionalen Raum umkehrbar eindeutig auf sich abbilden, wobei die Gesamtheit aller Kugeln wieder in die Gesamtheit aller Kugeln übergehen soll. Die Substitutionen haben folgende Formen:

$$1.\ w = azb; \qquad 3.\ w = z^{-1};$$
$$2.\ w = z + c; \qquad 4.\ w = (az + b) \cdot (cz + d)^{-1}$$

Speziellere Raumtransformationen, die die Einheitshyperkugel in sich überführen, werden durch diese Substitutionen vermittelt, wenn die Koeffizienten gewissen Bedingungen unterworfen werden. Diese Bedingungen lauten für die Formen

$$1 : a\bar{a}.\, b\bar{b} = 1; \quad 2 : c = 0; \quad 4 : -b\bar{a} + d\bar{c} = 0$$
$$\text{sowie } a\bar{c} - b\bar{d} = 0.$$

Die Form 3 entspricht an sich den gestellten Forderungen. Werden die Bedingungsgleichungen in ihre Komponenten zerlegt, so ergeben sich für die allgemeinste Substitution, die 16 freie Parameter enthält, acht Bedingungen. Die allgemeinste Raumgruppe, die die Hyperkugel auf sich abbildet, enthält somit acht freie Parameter. Durch die gefundenen Substitutionen und mit Hilfe einer von Carathéodory aufgestellten Distanzfunktion kann nun der Hyperkugel eine Metrik auferlegt werden. Wird definiert: unter einer metrischen Abbildung zweier vierdimensionaler Gebiete aufeinander versteht man eine eindeutige stetige Abbildung, bei der die mit Hilfe der Distanzfunktion gemessenen Längen entsprechender Kurven, sowie allerkürzeste Linien erhalten bleiben, so entspricht dieser Forderung die Invarianz der Distanzfunktion. Es können alle metrischen Abbildungen aufgestellt werden, und es findet sich der Satz: Alle metrischen Abbildungen der Hyperkugel auf sich selbst werden erhalten durch lineargebrochene Substitutionen, sowie durch Spiegelung am dreidimensionalen Raum.

Es werden nun die allgemeinsten Gruppen von Grenzkugeltypus aufgestellt. Diese können dargestellt werden in der Form:

$$s\,w\,s^{-1} = [(a - i_3 c + (b - i_3 d)\, i_3)\; z + b - i_3 d + (a - i_3 c)\, i_3]$$
$$[(- i_3 a + c + (d - i_3 b)\, i_3)\; z - i_3 b + d + (c - i_3 a)\, i_3]^{-1}$$

dabei vermittelt $s = (z + i_3) \cdot (i_3 z + 1)^{-1}$ eine Abbildung der Hyperkugel auf den dreidimensionalen Raum, $w = (az + b) \cdot (cz + d)^{-1}$ führt den dreidimensionalen Raum in sich über, s^{-1} bildet diesen wieder auf die Hyperkugel ab. Die allgemeinsten w-Gruppen, die sich auf diese Weise zu Gruppen von Grenzkugeltypus transformieren lassen, sind:

1. Die Modulgruppe, $a\ b\ c\ d$ reell, $ad - bc = 1$.

2. Die Piccardsche Gruppe, $a\ b\ c\ d$ komplex $ad - bc = 1$. Diese Gruppe ist sechsparametrig. Es lässt sich noch eine siebenparametrige bilden. Ihre Koeffizienten haben folgende Form:

$$a : a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2,\quad b : b_0 + r_0\,(a_1 i_1 + a_2 i_2),$$
$$c : c_0 + r_1\,(a_1 i_1 + a_2 i_2),\quad d : d_0 + (a_1 i_1 + a_2 i_2)$$

und es muss gelten:

$$r_2 a_0 + d_0 - r_1 b_0 - r_0 c_0 = 0$$
$$a_0 d_0 - r_2 a_1^2 - r_2 a_2^2 - b_0 c_0 + r_0 r_1 a_1^2 + r_0 r_1 a_2^2 = 1$$

Diese Gruppe enthält gegenüber der Piccardschen, in der nur Transformationen enthalten sind, die die Gaußsche Ebene in sich überführen, alle Transformationen, die beliebige Ebenen durch die reelle Axe in sich übergehen lassen.

3. R. Wavre (Genève). *Sur les propositions indémontrables.*

L'auteur n'a pas envoyé de résumé de sa communication.

4. Gustave Dumas (Lausanne). — *Sur les équations de la forme*

(1) $$A\, x^a\, y^b\, z^c + B = 0.$$

Cette équation rentre dans la catégorie de celles dont le polyèdre se réduit à une simple droite. Il en résulte que sa résolution s'obtient par la construction d'un tableau

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

à éléments entiers et de déterminant égal à ± 1, si, comme on l'admet ici, pour simplifier, les entiers a, b, c sont sans diviseur commun.

En appelant A' le mineur de a' dans le tableau, B' celui de b', etc. on a alors, en admettant pour simplifier l'écriture que dans (1), $A = -B = 1$,

$$(3) \qquad x = \xi^{A'} \eta^{A''}, \quad y = \xi^{B'} \eta^{B''}, \quad z = \xi^{C'} \eta^{C''}$$

comme solution paramétrique de (1). Il existe une infinité de solutions telles que (3), car le tableau (2) peut s'obtenir d'une infinité de façons.

Pour l'équation

$$z^5 - x^3 y = o,$$

on retrouve facilement les trois solutions à caractère holomorphe considérées déjà par *H.-W.-E. Jung* (Journal de Crelle, t. 133).

Les procédés de résolution employés ci-dessus, rentrent, comme cas particuliers, dans la méthode qu'utilise l'auteur de la communication pour la résolution des singularités des surfaces algébriques.

5. A. Stoll (Zürich). — *Zwei geometrische Bemerkungen.*

1. Anknüpfend an einen bekannten Satz von Steiner, der von Raabe und Wetzig, sowie von Hirst in anderer Richtung erweitert wurde — die Resultate des letzteren lassen sich übrigens noch weiter verallgemeinern — zeigte ich folgendes:

Das Lot aus einem Punkte P auf eine mit dem begleitenden Dreibein einer Raumkurve fest verbundene Ebene $\mathfrak{E}$ beschreibt eine gewisse Kegelfläche, wenn sich $\mathfrak{E}$ mit dem Dreibein längs der Kurve bewegt. Die Grösse f derselben ist eine quadratische Funktion von P und ihre Niveauflächen sind homothetische Ellipsoide. Diese werden Zylinder, wenn $\mathfrak{E}$ einer festen Geraden parallel bleibt. Der Mittelpunkt der Ellipsoidschar liefert das Minimum von f. Er verschiebt sich auf einer Geraden, wenn $\mathfrak{E}$ sich im Dreibein parallel verschiebt, während die Achsen der Ellipsoide ihre Richtung dabei nicht ändern.

2. Im Anschluss an eine Mitteilung von Prof. Pólya bewies ich folgenden Satz: Es seien $A_\gamma > 0$, $a_{\gamma\nu}$, b_ν, $\gamma = 0 \ldots g$, $\nu = 1 \ldots n$ Konstante, X_ν, $\nu = 1 \ldots n$ positive Variable. Fasst man die $a_{\gamma\nu}$, b_ν als je n kartesische Koordinaten von $(g + 2)$ Punkten: (a_γ), $\gamma = 0 \ldots g$, (b) auf, dann sei die Dimensionszahl der konvexen Hülle $\mathfrak{H}$ der (a_γ) gleich m. Natürlich ist $m \leq Min\ (g, n)$. Ferner sollen in der Funktion

$$w = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} X_\nu^{b_\nu}}{\sum\limits_{\gamma=0}^{g} A_\gamma \prod\limits_{\nu=1}^{n} X_\nu^{a_{\gamma\nu}}}$$

die positiven Bestimmungen der Potenzen genommen werden. Dann gilt: 1. w ist dann und nur dann beschränkt, wenn (b) im Innern oder auf dem Rande von $\mathfrak{H}$ liegt. 2. w erreicht das Maximum dann und nur dann, wenn (b) im Innern von $\mathfrak{H}$ liegt, und zwar in einem einzigen Punkte, wenn $n = m$, in ∞^{n-m} Punkten, wenn $n > m$.