

**Zeitschrift:** Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft =  
Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della  
Società Elvetica di Scienze Naturali

**Herausgeber:** Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

**Band:** 118 (1937)

**Vereinsnachrichten:** Section de Mathématiques

**Autor:** [s.n.]

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 1. Section de Mathématiques

Séance de la Société suisse de Mathématiques

Samedi, 28 août 1937

Président : Prof. Dr R. WAVRE (Genève)

Secrétaire : Prof. Dr P. BUCHNER (Bâle)

1. ANDRÉ MERCIER (Copenhague). — *Matrices pouvant servir d'unités pour les nombres de Clifford.*

Les nombres de Clifford sont définis par leurs unités  $I_i$  qui satisfont aux conditions  $I_i I_j + I_j I_i = 2 \delta_{ij}$ . On peut affirmer qu'il existe des objets mathématiques remplissant ces axiomes de définition, en formant certaines matrices dont la structure est rattachée à la métrique de l'espace des nombres de Clifford. Pour y arriver, il est indiqué de partir tout d'abord d'autres matrices que E. Cartan a définies dans sa théorie des spineurs<sup>1</sup> et au moyen desquelles on peut former des nombres hypercomplexes en prenant pour unités les  $n$  matrices particulières de Cartan qui se rapportent aux  $n$  vecteurs coordonnés de l'espace, cet espace étant défini par une autre métrique. Nous appelons nombres de Cartan ces nombres hypercomplexes. Nous montrons comment on peut passer, grâce à un changement de coordonnées convenables, des matrices de Cartan à des matrices qui remplissent les conditions posées pour les  $I_i$ . Si l'on se rapporte alors à un mémoire de G. Juvet<sup>2</sup>, où la théorie des spineurs est esquissée pour l'espace à quatre dimensions et leur importance pour les opérations de rotation de cet espace mise en évidence, on constate que les relations grâce auxquelles Juvet définit ses *spineurs de base* ne sont rien d'autre que les relations inverses, dans un cas particulier, des relations qui font passer des unités des nombres de Cartan à celles des nombres de Clifford.

2. EMIL SCHUBARTH (Basel). — *Über normal-diskontinuierliche lineare Gruppen in zwei komplexen Variablen.*

$G$  sei eine unendliche diskontinuierliche Gruppe von Transformationen  $T_i$ :

$$w' = \frac{a_i w + b_i z + c_i}{g_i w + h_i z + k_i}, \quad z' = \frac{d_i w + e_i z + f_i}{g_i w + h_i z + k_i}$$

<sup>1</sup> Cours professé à la Fac. des Sciences, Paris, 1935/36.

<sup>2</sup> G. Juvet, *Comm. Math. Helv.* **8**, 264, 1936 et *C. R.* **202**, 183 et 540, 1936.

in zwei komplexen Variablen und mit komplexen Koeffizienten.  $G$  enthalte keine infinitesimale Transformationen. Wir denken uns den Punkt-  
raum  $W(w, z)$  durch eine uneigentliche analytische Ebene  $\varepsilon_\infty$  abge-  
schlossen. Die Gruppe  $G$  heisst nach Myrberg normal-diskontinuierlich  
(n.—d.) im Bereich  $A$ , wenn ihre Transformationen in jedem abge-  
schlossenen Teilbereich von  $A$  eine normale Familie bilden. Diese Ver-  
schärfung des Begriffes der eigentlichen Diskontinuität lässt im Falle  
zweier komplexer Variablen auf Grund der Dualität zwischen dem vier-  
dimensionalen Raum  $W$  der Punkte und demjenigen  $\Omega$  der analytischen  
Ebenen eine einfache geometrische Deutung zu, falls man sich auf  
Gruppen 1. Klasse beschränkt, d. s. Gruppen, aus deren Transformationen  
sich nur Normalfolgen vom Rang 1 bilden lassen. *Notwendig und hin-  
reichend für die normale Diskontinuität einer solchen Gruppe  $G$  im Punkt  $P$   
ist die eigentliche Diskontinuität der induzierten Ebenengruppe  $\Gamma$  in je-  
der analytischen Ebene  $\varepsilon_P$  durch  $P$ .* — Die Funktionaldeterminante von  
 $T_i$  ist bei unimodularen Transformationen  $D_i(w, z) = (g_i w + h_i z + k_i)^{-3}$ ,  
das isometrische Gebilde  $\Pi_i: |g_i w + h_i z + k_i| = 1$  zerlegt die Punkte  
des Raumes  $W$  in drei Klassen: Inneres, Mantel und Äusseres von  $\Pi_i$ , je  
nachdem  $|D_i(w, z)| \geq 1$  ist.  $\Pi_i$  ist eine Projektivebene, und zwar  
eine einparametrische Schar analytischer Ebenen durch einen Punkt  $S_i$   
auf  $\varepsilon_\infty$ . Der Bereich  $R$  ausserhalb aller  $\Pi_i$  von  $G$  heisst der Aussen-  
bereich von  $G$ . Er existiert, sobald  $G$  n.—d. ist in einem Punkt  $Q$   
von  $\varepsilon_\infty$ . Fordert man in dualer Weise die n. D. von  $\Gamma$  in einer ana-  
lytischen Ebene  $\varepsilon_Q$  durch  $Q$  (z. B. in  $\varepsilon_\infty$ ), so gilt bei Gruppen 1. Klasse:  
 *$R$  ist Fundamentalbereich (FB) von  $G$  für  $N$ , wo  $N$  den Normalbe-  
reich von  $G$  bezeichnet. Ein solcher FB ist von Projektivebenen be-  
randet. Seine dreidimensionalen Ränder sind paarweise äquivalent und  
die Äquivalenztransformationen bilden unter geeigneten Voraussetzungen  
ein System von Erzeugenden für die Gruppe.  $R$  und seine Bilder über-  
decken  $N$  einfach und lückenlos (nach geeigneten Festsetzungen über  
die Ergänzung von  $R$  durch Randpunkte). Der Normalbereich von  $G$  ist  
planarkonvex.*

**3. ROLIN WAVRE (Genève).** — *Quelques corps de même potentiel.*

Voir le compte rendu de la séance dans l'Enseignement Mathématique.

**4. EMILE MARCHAND (Zurich).** — *Probabilités dépendantes et probabilités indépendantes dans les phénomènes en rapport avec la durée de la vie humaine.*

Considérons trois collectivités  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Pour chacune d'elles, le point de départ est un nombre d'assurés  $l_\omega$ , tous d'âge  $\omega$ . Seule la cause  $I$  réduit le nombre des assurés de la collectivité  $A$ ; seule la cause  $II$  — différente de  $I$  — réduit le nombre des assurés de la

collectivité  $B$ , tandis que les deux causes  $I$  et  $II$  agissant simultanément réduisent le nombre des assurés de la collectivité  $C$ , à partir de cet âge  $\omega$ .

Définissons par

$l_{\omega+t}^I$  le nombre des assurés à l'âge  $\omega+t$  que n'atteint pas la cause d'extinction  $I$  dans la collectivité  $A$ ,

$l_{\omega+t}^{II}$  le nombre des assurés à l'âge  $\omega+t$  que n'atteint pas la cause d'extinction  $II$  dans la collectivité  $B$ ,

$l_{\omega+t}^{I:II}$  le nombre des assurés à l'âge  $\omega+t$  que n'atteint ni la cause  $I$ , ni la cause  $II$  dans la collectivité  $C$ .

Le nombre des sinistrés  $C_t^I$  par suite de la cause  $I$  dans la collectivité  $C$ , entre l'âge  $\omega$  et  $\omega+t$  est :

$$C_t^I = \frac{-1}{l_\omega} \int_0^t l_{\omega+y}^{II} \cdot dl_{\omega+y}^I$$

Le nombre des sinistrés  $C_t^{II}$  par suite de la cause  $II$  dans la collectivité  $C$ , entre l'âge  $\omega$  et  $\omega+t$  est :

$$C_t^{II} = \frac{-1}{l_\omega} \int_0^t l_{\omega+y}^I \cdot dl_{\omega+y}^{II}$$

d'où

$$l_{\omega+t}^{I:II} = l_\omega - C_t^I - C_t^{II} = \frac{1}{l_\omega} \cdot l_{\omega+t}^I \cdot l_{\omega+t}^{II}$$

Les probabilités

$$Q_t^{I(e)} = \frac{C_t^I}{l_\omega} \quad \text{et} \quad Q_t^{II(e)} = \frac{C_t^{II}}{l_\omega}$$

sont les probabilités expérimentales ou probabilités dépendantes d'extinction pour le temps  $t$ , tandis que les probabilités

$$Q_t^{I(i)} = \frac{l_\omega - l_{\omega+t}^I}{l_\omega} \quad \text{et} \quad Q_t^{II(i)} = \frac{l_\omega - l_{\omega+t}^{II}}{l_\omega}$$

sont les probabilités indépendantes d'extinction pour le temps  $t$ .

L'actuaire ayant à déterminer, pour la collectivité  $C$ , où deux causes d'extinction  $I$  et  $II$  agissent simultanément, la probabilité qu'un

assuré ne soit pas atteint pendant le temps  $t$  par l'une au moins des deux causes d'extinction, peut choisir entre les deux possibilités suivantes :

- a) détermination directe des probabilités expérimentales d'extinction dans la collectivité  $C$  et calcul de la probabilité désirée par la formule :

$$\frac{l_{\omega+t}^{I:II}}{l_{\omega}} = 1 - Q_t^{I(e)} - Q_t^{II(e)} ;$$

- b) détermination soit directe, soit a priori des probabilités indépendantes d'extinction dans deux collectivités distinctes  $A$  et  $B$ , et calcul de la probabilité désirée par la formule :

$$\frac{l_{\omega+t}^{I:II}}{l_{\omega}} = \left[ 1 - Q_t^{I(i)} \right] \cdot \left[ 1 - Q_t^{II(i)} \right] \quad 1$$

Comme exemples de collectivité  $C$ , on peut indiquer :

- |                                    |                             |
|------------------------------------|-----------------------------|
| une collectivité d'actifs ;        | cause d'extinction I: décès |
|                                    | II: invalidité              |
| une collectivité de célibataires ; | cause d'extinction I: décès |
|                                    | II: mariage                 |
| une collectivité de veufs ;        | cause d'extinction I: décès |
|                                    | II: remariage.              |

La détermination directe des probabilités dépendantes ne présente pas de difficulté. Il n'en est pas de même des probabilités indépendantes. Il est pratiquement impossible d'avoir une collectivité  $B$  où l'invalidité, le mariage ou le remariage intervient seul et où la cause d'extinction : décès est éliminée. On peut en obtenir des valeurs approximatives, auxquelles nous avons donné le nom de probabilités corrigées.<sup>2</sup>

La probabilité corrigée de l'arrivée d'un événement à la suite d'une cause bien déterminée (probabilité corrigée d'extinction) est égale au nombre des sinistres provoqués par la cause envisagée pendant la période d'observation dans la collectivité  $C$ , divisé par le nombre de têtes exposées au risque, les sinistres provoqués par une autre cause que celle envisagée (par exemple le décès) étant considérés comme des sorties s'étant produites, pour la moitié des sinistres au début, pour l'autre moitié à la fin de la période d'observation.

<sup>1</sup> W. Friedli: „Intensitätsfunktion und Zivilstand.“ 21<sup>me</sup> bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 1926.

<sup>2</sup> E. Marchand: „Probabilités expérimentales, probabilités corrigées et probabilités indépendantes.“ 33<sup>me</sup> bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 1937.

Si nous définissons ces probabilités corrigées par

$$Q_t^{I(c)} \text{ et } Q_t^{II(c)}, \text{ on a}$$

$$\frac{l_{\omega+t}^{I:II}}{l_{\omega}} = 1 - \frac{1 - \left[1 - Q_t^{I(c)}\right] \cdot \left[1 - Q_t^{II(c)}\right]}{1 - \frac{1}{4} \cdot Q_t^{I(c)} \cdot Q_t^{II(c)}}$$

Les probabilités corrigées fournissent pour les probabilités indépendantes de bonnes valeurs approximatives et faciles à obtenir.

**5. RUDOLF FUETER (Zürich).** — *Die Singularitäten der regulären eindeutigen Funktionen einer Quaternionenvariablen.*

In überraschender Analogie zu den gewöhnlichen analytischen Funktionen kann man alle Singularitäten der rechts- resp. linksregulären eindeutigen Funktionen  $f(z)$  einer Quaternionenvariablen behandeln. Es gelingt, um jeden singulären Punkt die Reihenentwicklung anzugeben, sowie den Unterschied zwischen wesentlich und unwesentlich singulär festzulegen. Dabei findet man folgende Fälle:

1. *Isolierter singulärer Punkt im endlichen.* Ist  $z = 0$  ein solcher, so heisst er unwesentlich-singulär von  $f(z)$ , wenn es ein  $n$  gibt, so dass

$$|z^n f(z)|, \quad n > 0,$$

für alle  $|z| \leq r$  beschränkt bleibt.

2. Aus der Reihenentwicklung folgt notwendig die Definition, wann  $f(z)$  in  $\infty$  regulär ist, oder den isolierten singulären Punkt  $\infty$  hat. Die Reihenentwicklung um den isolierten Punkt  $\infty$  kann aufgestellt werden.

3. *Isolierte singuläre Kurve.* Legt man um jeden ihrer Punkte die Hyperkugel mit dem Radius  $r$ , und ist  $R$  die umhüllende Hyperfläche aller dieser Kugeln, so heisst die Kurve unwesentlich singulär von  $f(z)$ , wenn es ein  $n$  gibt, so dass

$$|(z - c(t))^n f(z)|, \quad n > 0,$$

auf  $R$  für alle  $r \leq r_0$  beschränkt bleibt. Dabei ist  $c(t)$  derjenige Punkt der Kurve, der mit  $z$  in einer gleichen Hypernormalebene liegt.

4. *Isolierte singuläre (zweidimensionale) Fläche.* Es gelten genau die dem Falle 3 entsprechenden Entwicklungen und Theoreme.

**6. CHARLES BLANC (Lausanne).** — *Sur une méthode pour l'étude des surfaces de Riemann.*

Cette méthode a été exposée dans ma thèse (Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes, p. 50; ou aussi Comm. math. helv., vol. 9 [1937], p. 357 et suiv.) Elle permet de construire des surfaces de Riemann simplement connexes, du type hyperbolique et peu ramifiées.

On peut donner grâce à cette méthode un exemple de surface de type hyperbolique ne possédant qu'une singularité transcendante et un ensemble dénombrable de points critiques algébriques.

Considérons la fonction  $w = -e^{-\zeta} + \zeta + 1$  dans le demi-plan  $\Im \zeta \geq 0$ , et la fonction  $w = e^{+\zeta} + \zeta - 1$  dans le demi-plan  $\Im \zeta \leq 0$ . Les deux surfaces de Riemann ainsi définies peuvent se souder le long de la droite  $\Im w = 0$ , et former ainsi une surface de Riemann  $F$ .

1. Cette surface est du type hyperbolique. Il suffit de considérer la relation  $H$  que fournit sa définition. Cette relation est du type hyperbolique (voir loc. cit., p. 362).

2.  $F$  n'a qu'une singularité, pour  $w = \infty$ . Il suffit de montrer que dans le plan  $\zeta$ , il n'existe aucun chemin tendant vers l'infini, sur lequel  $|w|$  reste borné. Un tel chemin devrait rester dans l'un des demi-plans  $\Im \zeta > 0$  ou  $\Im \zeta < 0$ . Mais le minimum de  $|w|$  sur le polygone de sommets  $2k\pi(1+i)$ ,  $2k\pi(-1+i)$ ,  $2k\pi(-1-i)$ ,  $2k\pi(1-i)$ , tend vers l'infini si  $k$  croît indéfiniment. Il n'y a donc qu'une singularité transcendante, qui est à l'infini.

Les points critiques de  $F$  sont donnés par les zéros de la dérivée de  $w$ . On voit facilement qu'ils ont l'infini pour point d'accumulation.

Cet exemple paraît constituer la surface hyperbolique la moins ramifiée.