

**Zeitschrift:** Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft =  
Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della  
Società Elvetica di Scienze Naturali

**Herausgeber:** Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

**Band:** 131 (1951)

**Vereinsnachrichten:** Sektion für Mathematik

**Autor:** [s.n.]

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag und Sonntag, den 29. und 30. September 1951

*Präsident*: Prof. Dr. A. PFLUGER (Zürich)

*Sekretär*: Prof. J. J. BURCKHARDT (Zürich)

1. GABRIEL THIERRIN (Institut Minerve, Villars-sur-Ollon). – *Sur les groupes semi-abéliens.*

Nous dirons qu'un groupe  $G$  est *semi-abélien* si le groupe commutateur  $C$  de  $G$  est sous-groupe propre ou impropre du centre  $Z$  de  $G$ . Les groupes abéliens sont des cas particuliers des groupes semi-abéliens. Remarquons que tout groupe semi-abélien est résoluble. Nous avons:

*Théorème.* *Tout groupe semi-abélien fini  $G$  est le produit de groupes abéliens n'ayant en commun deux à deux que le groupe commutateur  $C$  de  $G$ , et dont les ordres sont des puissances de nombres premiers multipliées par l'ordre de  $C$ .*

En effet, le groupe-quotient  $G/C$  est abélien. D'après le théorème fondamental sur les groupes abéliens finis, il est le produit direct de groupes-quotients cycliques dont les ordres sont des puissances de nombres premiers. Soient  $Q_1/C, Q_2/C, \dots, Q_m/C$  ces groupes-quotients cycliques. Les groupes  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  n'ont en commun deux à deux que le groupe commutateur  $C$  et les ordres de ces groupes sont des puissances de nombres premiers multipliées par l'ordre de  $C$ . Le groupe  $G$  est le produit de ces groupes  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ . Nous allons montrer que ces groupes sont abéliens. En effet soit  $Q$  l'un quelconque de ces groupes. Le groupe-quotient  $Q/C$  est cyclique. Nous avons:

$$Q = C + a_1C + a_2C + \dots + a_{n-1}C \quad (1)$$

Soit  $a_1C$  le complexe générateur du groupe-quotient cyclique  $Q/C$ , et soit  $a$  un élément quelconque de  $a_1C$ . Les puissances  $a, a^2, \dots, a^{n-1}, a^n$  de l'élément  $a$  appartiennent respectivement aux complexes  $a_1C, a_2C, \dots, a_{n-1}C, C$ . La décomposition (1) peut donc s'écrire:

$$Q = a^nC + aC + a^2C + \dots + a^{n-1}C, \text{ avec } a^nC = C$$

Par hypothèse,  $C$  est abélien, et chacun de ses éléments est permutable avec chacun des éléments de  $G$  et donc de  $Q$ . Soient  $a^i c_k$  et  $a^j c_r$  deux

éléments quelconques de  $Q$ ,  $c_k$  et  $c_r$  étant deux éléments de  $C$ . Nous avons :

$$a^i c_k \cdot a^j c_r = a^i a^j \cdot c_k c_r = a^j a^i \cdot c_r c_k = a^j c_r \cdot a^i c_k$$

Par conséquent, le groupe  $Q$  est abélien et le théorème est démontré.

Comme exemple de groupe semi-abélien, nous avons le groupe des quaternions. Le groupe commutateur  $C$  et le centre  $Z$  sont confondus :  $\pm 1$ . Les groupes abéliens de la décomposition sont les groupes cycliques engendrés respectivement, soit par  $i$  et  $j$ , soit par  $i$  et  $k$ , et soit par  $j$  et  $k$ . Les groupes hamiltoniens finis les plus généraux sont aussi des groupes semi-abéliens.

**2. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel).** — *Les systèmes d'éléments générateurs d'un groupe d'ordre fini et leurs groupes associés.*

Soit  $G$  un groupe non cyclique d'ordre fini  $n > 1$ . Soit  $k$  un entier  $> 1$  et soit  $B_k = \{S_1, \dots, S_k\}$  un système de  $k$  éléments indépendants générateurs du groupe  $G$ . On a donc  $(S_1, \dots, S_k) = G^1$ . Pour un groupe donné  $G$ ,  $k$  peut prendre différentes valeurs. Soient  $k_1, \dots, k_r$  ( $k_1 < \dots < k_r$ ) ces valeurs. Les nombres  $r, k_1, \dots, k_r$  sont des invariants du groupe  $G$ . Le nombre total de systèmes  $B_k$  est aussi un invariant de  $G$ , quel que soit  $k = k_1, \dots, k_r$ . Soit  $R$  un élément quelconque de  $G$  et soit  $T_i = R S_i R^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Posons  $R B R^{-1} = \{T_1, \dots, T_k\}$ . On a  $(T_1, \dots, T_k) = G$ , et  $\{T_1, \dots, T_k\}$  est également un système de  $k$  éléments indépendants générateurs de  $G$ . Soit  $C$  le centre de  $G$  et soit  $\lambda$  l'ordre de  $C$ . L'ensemble des éléments de  $G$  qui transforment un système donné  $B_k = \{S_1, \dots, S_k\}$  en lui-même forme le premier groupe  $g_1$  associé à  $B_k$ . Soit  $v_1$  l'ordre de  $g_1$ . Soit  $R$  un élément quelconque de  $g_1$ , soit  $R S_i R^{-1} = S_{j_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , et soit  $\sigma = \begin{pmatrix} S_1 & \dots & S_k \\ S_{i_1} & \dots & S_{i_k} \end{pmatrix}$ . L'ensemble des substitutions  $\sigma$  forme le second groupe  $g_2$  associé à  $B_k$ . Le groupe  $g_1$  est  $v_1/\lambda$  fois isomorphe au groupe  $g_2$ .

Soit 1)  $B_k^1, \dots, B_k^t$  une suite comprenant  $t$  systèmes  $B_k$  jouissant des propriétés suivantes. Quels que soient les deux nombres distincts  $i$  et  $j$  de la suite  $1, \dots, t$  et quel que soit l'élément  $R$  de  $G$ ,  $B_j \neq R B_i R^{-1}$ . D'autre part, quel que soit le système  $B_k$ , il existe un système  $B_k^i$  de la suite 1) et un élément  $R$  de  $G$ , tels que  $B_k = R B_k^i R^{-1}$ . La suite 1) est une suite complète de représentants indépendants des systèmes  $B_k$ . Soit  $g_1^i$  le premier groupe associé au système  $B_k^i$ ,  $i = 1, \dots, t$ , soit  $v_i$  l'ordre de  $g_1^i$ , et soit  $n$  l'ordre du groupe  $G$ . Alors le nombre total de différents

systèmes  $B_k$  est  $\sum_{i=1}^t \frac{n}{v_i}$ . Pour déterminer tous ces systèmes, il suffit de déterminer une suite complète 1) ainsi que le premier groupe associé à chaque système de la suite 1).

<sup>1</sup> Le symbole  $(S_1, \dots, S_k)$  désigne le groupe engendré par les éléments  $S_1, \dots, S_k$ .

Soit, à présent,  $G$  un groupe d'ordre fini, sous-groupe distingué d'un groupe plus vaste  $G_1$ . Soit  $C_1$  l'ensemble des éléments de  $G_1$  qui sont permutables avec chaque élément de  $G$ .  $C_1$  est un sous-groupe de  $G_1$ . Soit  $\lambda_1$  l'ordre de  $C_1$ . L'ensemble  $g_3$  comprenant tous les éléments de  $G_1$  qui transforment un système donné  $B_k = \{S_1, \dots, S_k\}$  de  $k$  éléments indépendants générateurs de  $G$  en lui-même est un groupe appelé troisième groupe associé à  $B_k$ , relatif au groupe  $G_1$ . Soit  $v_3$  l'ordre de  $g_3$ . Soit  $R_1$  un élément quelconque de  $g_3$ . Soit  $R_1 S_i R_1^{-1} = S_{h_i}, i = 1, \dots, k$ , et soit  $\tau = \begin{pmatrix} S_1 & \dots & S_k \\ S_{h_1} & \dots & S_{h_k} \end{pmatrix}$ . L'ensemble des substitutions  $\tau$  forme le quatrième groupe  $g_4$  associé au système  $B_k$ . Le groupe  $g_3$  est  $v_3/\lambda_1$ , fois isomorphe à  $g_4$ .

**3. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel).** — *Les bases du groupe de Klein généralisé et de certains groupes de Mathieu.*

Soit  $n$  un entier  $\geq 2$  et soit, pour tout  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $T_{1+2^i}$  la substitution régulière de degré  $2^n$  et du second ordre composée des  $2^{n-1}$  transpositions  $(j+k2^{i+1} \ j+k2^{i+1}+2^i)$ ,  $j = 1, \dots, 2^i$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2^{n-i}-1$ . Les substitutions  $T_{1+2^i}$  sont indépendantes et permutables deux à deux. Elles engendrent un groupe abélien régulier d'ordre et de degré  $2^n$  dont toutes les substitutions sont du second ordre. C'est le groupe de Klein généralisé  $G_{2^n}$ . Il est à base d'ordre  $n$  et les substitutions  $T_{1+2^i}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , constituent l'une de ses bases. Il existe une substitution de  $G_{2^n}$  et une seule qui transforme 1 en  $h$  quel que soit  $h = 1, 2, \dots, 2^n$ . Soit  $T_h$  cette substitution et soit  $T_h(k)$  le nombre que  $T_h$  substitue à  $k$ , quel que soit  $k = 1, 2, \dots, 2^n$ . Soient  $h = h_n 2^n + \dots + h_1 2 + h_0$  et  $k = k_n 2^n + \dots + k_1 2 + k_0$  les développements à base 2 des deux nombres  $h$  et  $k$ . Les nombres  $h_0, \dots, h_n, k_0, \dots, k_n$  font tous partie de l'ensemble  $\{0, 1\}$ . Soit  $r(s)$  le plus petit nombre de la suite  $0, 1, \dots, n$ , tel que  $h_r = 1$  ( $k_s = 1$ ) et soit  $t$  le plus grand des deux nombres  $r$  et  $s$ . On a  $T_h(k) = |h_n - k_n| 2^n + \dots + |h_{t+1} - k_{t+1}| 2^{t+1} + 1$ , si  $r = s = t$ , et  $T_h(k) = |h_n - k_n| 2^n + \dots + |h_{t+1} - k_{t+1}| 2^{t+1} + (h_t + k_t) 2^t - 1_{t-1} 2^{t-1} - \dots - 1_1 2 - 1_0 + 1$ , où  $1_u = k_u$ ,  $u = 0, \dots, t-1$ , si  $r > s$ , et  $1_u = h_u$ , si  $r < s$ .

Le nombre total de bases de  $G_{2^n}$  est  $(2^n - 1)(2^n - 2) \dots (2^n - 2^{n-1})/n!$  Quelle soit la base  $B = \{S_1, \dots, S_n\}$  du groupe  $G_{2^n}$ , il existe une permutation  $a_1 a_2 \dots a_{2^n}$  des nombres  $1, 2, \dots, 2^n$ , telle  $S_i$  est composée des  $2^{n-1}$  transpositions  $(a_{j+k2^i} \ a_{j+k2^i+2^i-1})$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2^{i-1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2^{n-i}-1$ .

Le premier groupe associé à toute base  $B$  de  $G_{2^n}$  est le groupe  $G_{2^n}$  tout entier. Le troisième groupe associé à une base  $B$  de  $G_{2^n}$  relatif au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{2^n}$  des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, 2^n$  est d'ordre  $2^{2^n} n!$  et quelle que soit la permutation  $i_1 i_2 \dots i_n$  des nombres  $1, \dots, n$  il existe une substitution du groupe  $\mathfrak{S}_{2^n}$  qui transforme  $S_j$  en  $S_{i_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Soit  $G_{N_n}$  le groupe formé de toutes les substitutions de  $\mathfrak{S}_{2^n}$  qui sont permutables avec le groupe  $G_{2^n}$  et soit  $N_n$  l'ordre de

ce groupe. On a  $N_n = 2^n (2^n - 1) (2^n - 2) \dots (2^n - 2^{n-1})$  et on obtient toutes les bases de  $G_{2^n}$  à partir de l'une quelconque de ces bases, en la transformant par les substitutions du groupe  $G_{N_n}$ .

Nous ne connaissons aucun exemple de groupe primitif non cyclique qui soit à base d'ordre supérieur à deux. Le groupe de Mathieu de degré douze, cinq fois transitif, peut comme on sait<sup>1</sup> être engendré par les six substitutions suivantes:  $A_1 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$ ,  $A_2 = (1\ 6\ 3\ 8)(2\ 5\ 4\ 7)$ ,  $A_3 = (1\ 9)(2\ 7)(4\ 8)(5\ 6)$ ,  $A_4 = (9\ 10)(2\ 4)(5\ 8)(6\ 7)$ ,  $A_5 = (10\ 11)(2\ 6)(4\ 8)(5\ 7)$  et  $A_6 = (11\ 12)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$ . Soit  $G_i$  le groupe engendré par les  $i$  substitutions  $A_1, A_2, \dots, A_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 5, 6$ . Les quatre groupes primitifs  $G_3, G_4, G_5$  et  $G_6$  sont à base du second ordre.

**4. HANS KÜNZI (Zürich).** — *Riemannsche Flächen mit einfach-periodischen und doppeltperiodischen Enden.*

Eine der wichtigsten Aufgaben der Funktionentheorie besteht darin, die Wertverteilung für eine meromorphe Funktion anzugeben, die man nicht explizite, sondern nur durch die sie erzeugende Riemannsche Fläche kennt. Von der allgemeinen Lösung dieses Problems sind wir heute allerdings noch weit entfernt. Wesentliche Resultate in dieser Richtung wurden von Ullrich und Wittich erzielt, indem sie die Wertverteilung für diejenige Klasse Riemannscher Flächen bestimmten, deren Streckenkomplexe aus endlich vielen periodischen Enden bestehen. Wittich zeigte weiter, wie sich durch Asymmetrie im Streckenkomplex die Ordnung der Funktion erhöhen kann. In einer Arbeit untersuchte der Verfasser eine weitere Flächenklasse, deren Streckenkomplexe doppeltperiodische Enden aufweisen. Die Wertverteilung einer Funktion, deren Streckenkomplex sowohl einfachperiodische wie doppeltperiodische Enden aufweist, ist dadurch charakterisiert, daß trotz den vorhandenen logarithmischen Windungspunkten keine Defekte auftreten können. Im weiteren lassen sich Beispiele angeben, in denen durch Verschiebung der Grundpunkte, d. h. Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche, eine Ordnungserhöhung erzielt werden kann.

Eine ausführliche Darstellung erfolgt in den «Commentarii Mathematici Helvetici».

**5. MAX GUT (Zürich).** — *Kubische Klassenkörper über quadratisch-imaginären Grundkörpern.*

Die Mitteilung erschien in extenso in dem «Nieuw Archief voor Wiskunde», Groningen, Jahrgang 1951, S. 185.

**6. CHARLES BLANC (Lausanne).** — *Formules d'intégration approchée et fonctions aléatoires.*

On admet en général que toute méthode numérique approchée doit s'accompagner d'une évaluation de l'erreur commise; et de fait, assez

<sup>1</sup> Voir, par exemple, C. Jordan, Traité des substitutions, p. 33.

souvent, on donne en effet un moyen d'effectuer cette évaluation. Pour fixer les idées, considérons les très nombreuses formules de quadrature approchée, par lesquelles on détermine une approximation de  $\int_a^b f(x)dx$  au moyen d'une combinaison linéaire de valeurs de  $f(x)$  dans  $(a, b)$ ; pour chacune de ces formules, il est possible de borner l'erreur au moyen d'une borne d'une des dérivées de  $f(x)$ . En principe, la situation est donc parfaitement satisfaisante; en fait, on peut formuler deux objections: d'abord la dérivée en question peut ne pas exister, ou être d'un calcul très laborieux; enfin l'ordre des dérivées considérées sera en général différent pour deux formules différentes, ce qui ne permet pas les comparaisons.

Dans ces évaluations, on cherche toujours une borne de l'erreur pour un ensemble assez étroit de données (par exemple les fonctions dont la dérivée  $n$ -ième est bornée par un nombre  $A$ ); or on peut aborder le problème différemment, en attribuant à l'ensemble des fonctions une distribution de probabilité (donc en considérant une fonction aléatoire) et en cherchant la distribution de l'erreur correspondante. Les paramètres de la distribution de l'erreur se calculent facilement à partir de ceux de la fonction aléatoire: par exemple, la variance de l'erreur s'exprime au moyen de valeurs de la fonction d'autocorrélation de la fonction aléatoire. On a alors la possibilité de comparer les formules en ce qui concerne la distribution de l'erreur. De plus, l'ensemble de fonctions considéré est beaucoup plus large.

Il est clair qu'une telle évaluation n'a qu'un caractère de probabilité, mais c'est en somme le seul point de vue que l'on peut adopter dans la plupart des applications, par exemple si l'on veut étudier l'erreur commise dans l'intégration numérique d'une fonction obtenue expérimentalement. Il semble enfin que l'on pourra chercher dans cette voie pour évaluer l'erreur commise dans l'intégration numérique approchée des équations différentielles ou aux dérivées partielles, où l'on ne connaît actuellement, le plus souvent, aucun moyen de borner cette erreur.

#### 7. LOUIS LOCHER (Winterthur). — *Grundlagen einer koordinatenfreien Kurventheorie.*

Eine rein synthetische Kurvengeometrie findet sich in dem Werke *Geometrie der Lage* von *G.K.Ch. von Staudt* veranlagt, Ansätze finden sich auch bei *F. Moebius*. Als erster hat wohl *Adolf Kneser* in zwei Abhandlungen 1889 und 1893 in den «*Mathematischen Annalen*» eine strenge Grundlegung für eine synthetische Kurvengeometrie vorgeschlagen. *C. Juel* hat dann die Ansätze ausgebaut und manche schöne Ergebnisse erhalten.

Die Schwierigkeiten, eine elementare, anschauliche Kurvengeometrie aufzubauen, sind durch folgende Umstände gekennzeichnet: Entweder gerät man bald in das Gestrüpp mengentheoretischer Komplikationen oder man beschränkt sich von vornherein auf einen Bereich von Objekten, zum Beispiel auf algebraische Kurven, der zwar abnormale Ver-

hältnisse ausschließt, der aber doch allzu eng erscheint. Für eine anschauliche Kurvengeometrie ist zum Beispiel nicht einzusehen, warum man sich auf Objekte beschränken sollte, die in ihrer Ganzheit bereits durch ein beliebig kleines Stück bestimmt sind. Das war ja das überraschende Ergebnis der Untersuchungen von *C. Juel*, daß manche Sätze, die man für algebraische Gebilde als typisch betrachtete, sich als viel allgemeiner gültig erwiesen.

Die Aufgabe, eine Einführung in die Juelsche Geometrie zu schreiben, gab den Anlaß, nach einer Grundlage der Theorie zu suchen, welche gewissen bisher wenig beachteten Forderungen genügt. Die gewählten Axiome wurden im Referat kurz skizziert. Eine ausführliche Darstellung erscheint unter dem Titel *Freie Geometrie ebener Kurven* als erstes Heft der Sammlung *Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus* im Verlag Birkhäuser (Basel).

**8.** ROSALIND CECILY YOUNG (London). — *L'œuvre de vulgarisation dans les mathématiques pures.* — Pas reçu de manuscrit.

Es haben noch gesprochen: H. Bieri, Bern; H. Guggenheimer, Basel; G. Hauser, Luzern; Adolf Kriszten, Zürich; Heinrich Meier, Rorbas; K.F. Moppert, Basel.