

Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft.
Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société
Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative
= Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 144 (1964)

Artikel: Differentialgeometrie und Feldphysik

Autor: Scherrer, Willy

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-90553>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

8. WILLY SCHERRER (Bern) – *Differentialgeometrie und Feldphysik.*

§ 1. *Geschichtliches*

Das erste Beispiel einer erfolgreichen Theorie, in welcher Feldphysik und Differentialgeometrie zusammenwirken, bildet die Elektrodynamik des Vakuums im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie. Das Feld wird repräsentiert durch die lineare Differentialform der Potentiale

$$d' \Phi = \Phi_\lambda dy^\lambda \quad (1)$$

und die Geometrie durch eine quadratische Differentialform, nämlich die metrische Grundform

$$ds^2 = e_\alpha dy^\alpha dy^\alpha \quad (2)$$

des pseudoeuklidischen Zeitraums.

Als das wichtigste Ergebnis dieser Theorie bezeichnete *Einstein* das Prinzip der Äquivalenz von Masse und Energie gemäss der Formel

$$E = mc^2. \quad (3)$$

Verbindet man nun dieses Prinzip mit der empirisch weitgehend bestätigten Äquivalenz von träger und schwerer Masse, so ergibt sich als notwendige Folgerung die Krümmung von Lichtstrahlen unter dem Einfluss der Gravitation.

Da nun die Grundform (2) nur eine geradlinige Lichtausbreitung darzustellen gestattet, wird durch diese Folgerung der Rahmen der speziellen Relativitätstheorie gesprengt.

In einer bewundernswerten Synthese ist es hierauf *Einstein* gelungen, eine in wesentlichen Zügen erfolgreiche Theorie der Gravitation dadurch zu schaffen, dass er die Grundform (2) durch die Grundform

$$ds^2 = G_{\sigma\tau} dx^\sigma dx^\tau \quad (4)$$

einer indefiniten Riemann-Metrik ersetzte. Durch die 10 von den Koordinaten x^0, x^1, x^2, x^3 abhängigen Gravitationspotentiale $G_{\sigma\tau}$ werden nun Feld und Metrik buchstäblich miteinander verschmolzen. Diese Theorie, die ich inskünftig als *quadratische Feldtheorie* bezeichnen werde, ist also das zweite Beispiel für das Zusammenwirken von Differentialgeometrie und Feldphysik.

Beide Theorien, die sich übrigens zwanglos in einem Rahmen vereinigen lassen, beruhen wesentlich auf makroskopischen Begriffen. Die Frage, ob von derartigen Theorien überhaupt etwas für die Atomistik zu erwarten sei, ist daher nie zur Ruhe gekommen. Einen sehr wichtigen positiven Beitrag zu dieser Frage lieferte *Dirac* durch seine Linearisierung der Grundform (2) gemäss

$$ds = \gamma_\alpha dy^\alpha, \quad (5)$$

wobei die γ_α konstante komplexe Matrizen bedeuten.

Die Idee einer reinen Feldphysik wurde 1912 von *Gustav Mie* gefasst und schon 1915 von *David Hilbert* aufgrund einer tiefgehenden mathematischen Analyse mit Einsteins Ansätzen zur quadratischen Feldtheorie in Verbindung gebracht. Die damit gegebenen Anregungen zu einer einheitlichen Feldtheorie wurden ab 1919 von *Einstein* durch die Forderung vertieft, vermittels einer geometrischen Bereicherung des Zeitraumes die phänomenologischen Tensoren (Energie, Strom) durch reine Feldgrößen zu ersetzen.

In keiner der genannten Theorien jedoch ist es gelungen, eine befriedigende Darstellung der Feldenergie zu gewinnen. Im folgenden will ich daher unter dem Titel *Lineare Feldtheorie* einen Vorschlag erläutern, der diese Schwierigkeit methodisch zu bearbeiten gestattet.

§ 2. Lineare Feldtheorie

Die Betrachtung der Differentialformen (1) und (5) lässt es als durchaus natürlich erscheinen, den Diracschen Ansatz gleichsam umzukehren: Man legt also primär invariante lineare Differentialformen

$$g^{\lambda,} = g^{\lambda,}_{,\mu} dx^{\mu} \quad (6)$$

zugrunde und kann dann aus diesen durch Quadrieren sekundär eine quadratische Differentialform (4) gewinnen. Da der Zeitraum 4 Dimensionen hat, muss natürlich das System (6) aus 4 linear unabhängigen Formen bestehen.

Weiter empfiehlt es sich, zu setzen

$$g = \text{Det.} \parallel g^{\lambda,}_{,\mu} \parallel \quad (7a)$$

sowie

$$\parallel g^{\lambda,}_{,\mu} \parallel = (\parallel g^{\lambda,}_{,\mu} \parallel^{-1})', \quad (7b)$$

d.h. also neben der Basismatrix nicht die Inverse, sondern deren Transponierte zu verwenden.

Da weiter jede lineare Kombination aus (6) mit konstanten (invarianten) Koeffizienten

$$L = C_{\lambda} g^{\lambda,} \quad (8)$$

wiederum eine invariante lineare Differentialform darstellt, darf man nicht bei den individuellen Formen (6) stehenbleiben, sondern muss eine aus der Basis (6) aufgebaute lineare Schar zulassen, die von einer linearen Gruppe beherrscht wird.

Wir haben es also mit zwei Gruppen zu tun, der Gruppe aller Transformationen der Koordinaten x^{λ} (Koordinatengruppe) und der linearen Gruppe der Transformationen der Formen $g^{\lambda,}$ (Formengruppe). Physikalisch bedeutsam können daher nur totalinvariante Relationen sein, d. h. also Aussagen, die simultan in bezug auf beide Gruppen invariant sind.

Die physikalische Erfahrung legt es uns natürlich nahe, die *Lorentz-Gruppe* als Formengruppe zu wählen, und als erste Totalinvariante ergibt sich

$$Q = e_\alpha, g^\alpha, g^\alpha \quad (9)$$

Führt man in ihr die Formen (6) explizite ein, so verwandelt sie sich in

$$Q = G_{,\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu \quad (10a)$$

mit

$$G_{,\lambda\mu} = e_\alpha g^\alpha_{,\lambda} g^\alpha_{,\mu}. \quad (10b)$$

Durch die Basis (6) ist also eindeutig eine Riemann-Einstein-Metrik bestimmt, während umgekehrt nach Vorgabe einer solchen Metrik noch 6 Freiheitsgrade verfügbar bleiben.

Tensoren können jetzt doppelt gemischt sein nach dem Muster

$$T^{\lambda,\dots,\varrho}_{,\mu,\dots,\sigma}, \quad (11)$$

wobei rechts vom Komma die Koordinatenzeiger ϱ, σ und links vom Komma die Formenzeiger λ, μ stehen. Neben die aus der quadratischen Theorie bekannten vertikalen Zeigerverschiebungen treten jetzt horizontale Zeigerverschiebungen, bei denen jeweils ein Koordinatenzeiger in einen Formenzeiger übergeht oder umgekehrt.

Die Grundlage der Tensoranalysis liefern die 40 *Dreizeigersymbole*

$$\gamma^{\lambda,\varrho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^{\lambda,\sigma}}{\partial x^\varrho} + \frac{\partial g^{\lambda,\varrho}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (12)$$

und die 24 *Feldstärken*

$$f^{\lambda,\varrho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^{\lambda,\sigma}}{\partial x^\varrho} - \frac{\partial g^{\lambda,\varrho}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (13)$$

Aus (13) erhält man die Formentensoren

$$f^{\lambda,\varrho\sigma}_{,\mu\nu} = g_{\mu,\nu} g^{\varrho,\sigma} f^{\lambda,\varrho\sigma} \quad (14a)$$

und

$$f_{\lambda} = f^{\mu}_{,\lambda\mu} \quad (14b)$$

und aus diesen schliesslich die drei Totalinvarianten

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= f_{\alpha\beta\gamma} f^{\alpha\beta\gamma} \\ H_2 &= f_{\beta\alpha\gamma} f^{\gamma\alpha\beta} \\ H_3 &= f_{\alpha} f^{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Als allgemeinste totalinvariante Wirkungsdichte ergibt sich daher

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{W} &= W g \\ W &= \Lambda_0 + \Lambda_1 H + \Lambda_2 H + \Lambda_3 H, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

worin die Λ Konstanten bedeuten.

Setzt man jetzt

$$t_{\lambda,}{}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \left(\frac{\partial g^{\lambda,}{}_{,\mu}}{\partial x^\nu} \right)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{\mu} = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial g^{\lambda,}{}_{,\mu}}, \quad (17 \text{ a, b})$$

so erhält man aus

$$\delta \int \mathfrak{W} dx = 0 \quad (18)$$

die Feldgleichungen

$$\mathfrak{W}_{\lambda,}{}^{\mu} = \frac{\partial t_{\lambda,}{}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{\mu} = 0. \quad (19)$$

Da die Tensordichte (17 a) in den Zeigern μ, ν antisymmetrisch ist, folgen aus (19) unmittelbar die differentiellen Erhaltungssätze

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{\mu}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (20)$$

Aus (20) ergibt sich daher bei genügendem Abklingen im Unendlichen der konstante Energieimpulsvektor

$$C_\lambda = \kappa^{-1} \iiint \mathfrak{T}_{\lambda,}{}^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (21)$$

$x^0 = \text{konst.}$

§ 3. Folgerungen

Als entscheidend für die Gewinnung konvergenter Energieintegrale erweist sich die Einführung derjenigen Matrizen, welche durch das Verschwinden der Feldstärken (13) gekennzeichnet sind. Da dieselben den Lorentz-Raum charakterisieren, nenne ich sie *Trägheitsmatrizen* und bezeichne sie mit

$$\| t^{\lambda,}{}_{,\mu} \|$$

Jede Basismatrix lässt sich gemäss

$$g^{\lambda, \mu} = h^{\nu, \mu} t^{\lambda, \nu} = h^{\lambda, \nu} t^{\nu, \mu} \quad (22)$$

auf zwei Arten aus einer vorgegebenen Trägheitsmatrix kombinieren. Jedes konkrete Problem reduziert sich damit auf die Bestimmung der «ungemischten» Hilfsmatrix

$$\| h^{\lambda, \mu} \| \text{ resp. } \| h_{\mu}^{\lambda} \|$$

Nun zu den Anwendungen.

1. Die Gravitationsgleichungen

Spezialisiert man (16) zu

$$\mathfrak{B} = H - \frac{1}{2} H_1 + H_2 - 2 H_3, \quad (23)$$

so erhält man aus (19) genau die Einsteinschen Vakuumsgleichungen der Gravitation.

2. Die Gravitationsenergie einer ruhenden kugelsymmetrischen Masse

Man legt gemäss (22) die dieser Symmetrie entsprechende Trägheitsmatrix zugrunde und wählt die Hilfsmatrix $\| h^{\lambda, \mu} \|$ so, dass das resultierende Linienelement dem Schwarzschild'schen Ansatz entspricht. Als Totalenergie des von der Masse m erzeugten Gravitationsfeldes ergibt sich

$$E = 8 \pi \kappa^{-1} a. \quad (24)$$

Da a den Gravitationsradius darstellt, ergibt sich die Gleichung (3).

3. Einordnung der Elektromagnetik

Man erweitert die Wirkungskfunktion (23) auf

$$\mathfrak{B} = H + \kappa F, \quad (25)$$

wobei F die Wirkungskfunktion des elektromagnetischen Feldes darstellt. Als Totalenergie des von einer ruhenden, kugelsymmetrischen und geladenen Masse erzeugten Gesamtfeldes ergibt sich

$$E = 8 \pi \kappa^{-1} \sqrt{a^2 \pm \frac{1}{2} \kappa e^2}. \quad (26)$$

Dabei gilt das obere oder das untere Vorzeichen, je nachdem man der

Gravitationsenergie das gleiche oder das entgegengesetzte Vorzeichen der elektromagnetischen Energie erteilt.

4. Kosmologie

Gesucht ist der Weltradius L als Funktion der Zeit. Nach der üblichen Zerspaltung baut man die räumliche Basis aus 3 Vektorfeldern auf, die in der 3-Sphäre überall stetig sind. Zu jeder Wirkungsfunktion ergibt sich genau eine Lösung. Mit der Abkürzung

$$\Omega = 2 \Lambda_1 + \Lambda_2 + 3 \Lambda_3 \quad (27)$$

kann dieselbe als Energiegleichung

$$T_{0,0} = - \frac{3 \left[\Omega L'^2 + 8 (\Lambda_1 - \Lambda_2) \right]}{4 \kappa L^2} + \frac{\Lambda_0}{\kappa} = 0 \quad (28)$$

geschrieben werden. Wie man leicht sieht, ergeben sich je nach der Wahl der Konstanten auf einfachste Weise aperiodische, statische, periodische und monotone Welten. Speziell im klassischen Falle (23) ergibt sich aus $\mathfrak{B} = \Lambda_0 + H$ die De-Sitter-Welt.