

Aus der Geschichte des Zahlenbegriffes

Autor(en): **Pasquier, L. Gustav Du**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische pädagogische Zeitschrift**

Band (Jahr): **19 (1909)**

Heft 6

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-788964>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Aus der Geschichte des Zahlenbegriffes.

Von Dr. L. Gustav Du Pasquier,
Privatdozent am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich.*)

Die Überzeugung, dass die ganze Natur eine fortlaufende und stetige Entwicklung durchmacht, hat sich in neuerer Zeit immer mehr ausgebreitet. Die Naturwissenschaften haben ihr kräftige Stützpunkte verliehen; auf dem Gebiete der Sprachforschung behauptet sie seit langem das Feld, und man könnte sich darüber wundern, dass die moderne Evolutionstheorie nicht schon längst von Sprachforschern aufgestellt wurde; denn jede neue Errungenschaft der Linguistik bestätigt sie.

Diesem Naturgesetze stetiger Umwandlung sind auch unsere abstrakten Begriffe unterworfen, nicht nur ihre lautlichen Ausdrücke: die Wörter. Manchmal ändert sich bloss die äussere Gestalt des Wortes, während seine Bedeutung erhalten bleibt; als Beispiel hierfür sei das Wort „drei“ erwähnt; es hat in den indogermanischen Sprachen die verschiedensten Wandlungen durchgemacht, aber der Sinn des Wortes ist dabei immer derselbe geblieben. Indessen unterliegt gewöhnlich auch die Bedeutung eines Wortes fortlaufender Veränderung. Ein bekanntes Beispiel liefert das jetzt internationale Wort „Bureau“. Ursprünglich bedeutete ja dieses

*) Antrittsvorlesung, gehalten am 30. Januar 1909. Als Quellen sind hauptsächlich folgende Werke zu nennen:

Pott, „Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Weltteile“. Halle, 1847.

Pott, „Die Sprachverschiedenheit in Europa an den Zahlwörtern nachgewiesen“. Halle, 1868.

Moritz Cantor, „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“. 4 Bände. Leipzig, 1894—1908.

Alexander von Humboldt, in Crelle's „Journal für reine und angewandte Mathematik“. Bd. IV, 1829, S. 205: „Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwertes in den indischen Zahlen“.

Wort eine Sorte groben Tuches, eine besondere Art starker Leinwand. Später, als die Geldwechsler die Gewohnheit nahmen, ihren Tisch mit einem Teppich aus Bureau zu überziehen, verstand man unter diesem Worte den Tisch selbst, auf welchem Geld gewechselt und gerechnet wurde; noch später das Zimmer, in welchem sich ein solcher Schreibtisch befand; schliesslich sogar die Personen, die sich im betreffenden Lokale regelmässig versammeln oder miteinander zu 'verhandeln haben. Das „Bureau einer Versammlung“, das „Bureau einer Gesellschaft“ ist der Inbegriff der Personen, welche mit der Leitung der Geschäfte speziell betraut sind.

Ganz ähnlich ist es mit dem Begriffe „Zahl“ gegangen; im Laufe der Zeit hat man auch unter dem Worte „Zahl“ Dinge verstanden, die auf den ersten Blick recht wenig miteinander zu tun haben.

Der ursprüngliche Sinn des Wortes Zahl ist „Anzahl“; anfänglich nannte man „Zahl“ nur das Resultat des Zählens. Es ist das erste Stadium in der Geschichte des Zahlenbegriffes.

Die Operation des Zählens lässt sich vom psychologischen Standpunkt aus in mehrere Teile zergliedern; als wesentlich müssen zwei Eigenschaften bezeichnet werden, nämlich die Genauigkeit und die Abstraktion. Das Wichtigste und Schwierigste beim Zählen ist das Abstrahieren, das Absehen von allen individuellen Eigentümlichkeiten der zu zählenden Objekte; ein Beispiel möge dies beweisen; es ist dem Bericht eines Forschungsreisenden namens Lichtenstein entnommen; er erzählt unter anderem vom Negerstamme der Koossas in Südafrika folgende Tatsache: ein reicher Koossaneger besass ungefähr vierhundert Stück Hornvieh. Wenn nun die Herde abends von der Weide zurückkehrte, liess er sie im Gänsemarsch an sich vorüberziehen; er wusste dann ganz genau, ob alle vierhundert Tiere da waren oder nicht; ja noch mehr: wenn eines der Tiere fehlte, so konnte er ganz genau sagen, welches er vermisste. Dieser sorgsame Landwirt hatte in seinem Gedächtnis das Bild jedes einzelnen Tieres aufbewahrt, mit allen individuellen Eigentümlichkeiten, die ihm anhafteten. Wir werden hier nicht mit Recht sagen dürfen, der Eigentümer habe seine Tiere „gezählt“, denn die geistige Arbeit des Abstrahierens hat er dabei nicht geleistet; in gewissem Sinne hat er sogar gerade das Gegenteil dessen getan, was beim Zählen geschieht. Die Aufmerksamkeit ist beim Zählen eben gar nicht auf die individuellen Eigentümlichkeiten der zu zählenden Objekte gerichtet; von ihnen muss man vielmehr gänzlich absehen. Dieses Abstrahieren bedeutet eine grosse geistige Anstrengung; uns Erwachsenen kommt sie zwar nicht mehr klar zum Bewusstsein, weil wir so sehr daran gewohnt sind; aber an kleinen

Kindern bekommt man sie noch deutlich zu spüren, wenn man ihnen das Zählen beibringen will; ebenso bei unkultivierten Völkern: so erzählt Mungo Park von einem gewissen Stamme Wilder, dass die betreffenden Eingeborenen immer nur bis zwei zählten, und wenn man sie zwingen wollte, grössere Zahlen mit Genauigkeit anzugeben, so brachen sie in Tränen aus, wegen der geistigen Überanstrengung.

Man kann demnach das Zählen folgendermassen definieren: *Dinge zählen heisst: diese Dinge als gleichartig ansehen und ihnen einzeln andere gleichartige Dinge zuordnen.* Diese Definition möge durch folgendes Beispiel verdeutlicht werden: man denke sich vor einem Klassenzimmer Haken angebracht, an welchen die Schüler ihre Mützen aufzuhängen haben, und zwar sei genau für jeden Schüler ein Haken vorhanden. Wenn nun ein Lehrer dieses weiss und vor Eintritt in die Klasse mit einem Blicke übersieht, dass an jedem Haken eine Mütze hängt, so hat er, nach der vorigen Definition, „die Schüler gezählt“; denn er hat im Geiste die Schüler als gleichartig angesehen und sie einzeln den Haken zugeordnet. Auch wenn er die Anzahl der Schüler nicht durch ein Zahlwort zu bezeichnen vermag, so wird man doch, vom psychologischen Standpunkt aus, sein Urteilen ein „Zählen“ nennen können. Freilich ist ein solches Zählen, ohne Zahlwörter und ohne Zahlzeichen, ein sehr unzivilisiertes und höchst primitives; aber es ist das Kindheitsstadium des Zählens.

Am nächsten liegt es dem Menschen, den zu zählenden Dingen seine zehn Finger zuzuordnen, und falls die betreffenden Menschen keine Stiefel tragen, also barfuss gehen oder doch nur Sandalen benutzen, auch noch die zehn Zehen. Bei vielen Völkern sind noch heute die Finger ein ganz unentbehrliches Hilfsmittel zum Zählen. Mehrere Forschungsreisende bestätigen z. B. die Tatsache, dass die Zulukaffern noch jetzt nur mit Hülfe der Finger zählen; für jeden Gegenstand, der gezählt werden soll, heben sie einen Finger in die Höhe und beobachten dabei eine feste Reihenfolge. Jedesmal, wenn zehn durchgezählt sind, klatschen sie einmal laut in die Hände. — Ein Mossutoneger kann auch niemals anders als mit Hülfe der Finger zählen. *) Will er aber eine grössere Zahl ausdrücken, so klatscht er nicht in die Hände, wie ein Zulukaffer es tut, sondern holt sich einen Hilfsmann, welcher durch Aufheben der Finger, die Zehner anzudeuten hat. So oft zehn durchgezählt sind, streckt dieser Kamerad einen Finger in die Höhe, und der erste fängt von neuem an. Bei Zählen über hundert wird sogar noch ein dritter Mann zum Andeuten der Hunderter angestellt.

*) v. Schrupf, „Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft“ XVI, S. 463.

Zu solchem Zählen sind weder Zahlwörter noch Zahlzeichen notwendig; es bildet die allererste Phase der Entwicklung.

Auf diesem Kulturzustande ist jedoch die Menschheit glücklicherweise nicht überall stehen geblieben. Als der menschliche Geist seinen Ausdruck in der Sprache fand, wurden auch die Zahlennamen geschaffen. Hier beginnt eine zweite Phase in der Geschichte des Zahlenbegriffes: die Bildung der Namen für ganze Zahlen und die Darstellung der Zahlen durch die Schrift.

Es lag zuerst nahe, die Zahlen gerade so zu benennen wie gewisse konkrete Dinge, welche jedem geläufig waren und überdies die Vorstellung einer bestimmten Anzahl erweckten, wie etwa „Flügel“ und „zwei“. In vielen Sprachen finden sich solche bildlichen Bezeichnungen. Der Gelehrte Alexander von Humboldt, der Linguist Pott, u. a., führen Sprachen an, in welchen „Hand“ oder „Faust“ durch dasselbe Wort wie „fünf“ ausgedrückt wird. Von zahlreichen weiteren Beispielen sei eines aus dem „dunkeln Weltteile“ zitiert: in einer afrikanischen Mundart heisst die Zahl zwanzig „mobande“. Die wörtliche Übersetzung ergibt: „mo“ = Mensch; „bande“ ist Participium des Zeitwortes „ban“ = beendigen, also: „mobande“ = „ein Mensch beendigt“; wenn man nämlich alle zehn Finger und alle zehn Zehen durchgezählt hatte, war man zur Anzahl zwanzig gelangt und hatte zugleich „einen Menschen beendigt“, d. h. „fertig gezählt“.

Auch dieses Bild wird in vielen Sprachen angewandt. Die alten Inder, wenigstens ihre bekannten mathematischen Schriftsteller, haben dieses Prinzip der Zahlwortbildung sogar systematisch durchgeführt, so z. B. *Bhâskara Âcârya*, d. h. „Bhâskara der Gelehrte“, geb. 1114 n. Chr., in einem Werke, das er *Lîlâvatî*, d. i. „die Reizende“, betitelt hat. Als Beleg sei folgendes angegeben:

sûrya bedeutet zugleich „Sonne“ und „zwölf“, weil in der indischen Mythologie der Sonne zwölf Wohnungen zugeschrieben wurden, entsprechend den zwölf Bildern des Tierkreises; *abdhi* hat gleichzeitig die Bedeutungen „Ozean“ und „vier“, da es in der indischen Mythologie vier Ozeane gab. Das Wort *abdhisûrya* bedeutet demnach 124, nämlich vier Einer und zwölf Zehner, während die Wortverbindung *sûryâbdhi* die Zahl 412 vorstellt, nämlich zwölf Einer und vier Hunderter. Die Beispiele liessen sich beliebig vermehren. Für jede der kleineren Zahlen stand eine grosse Anzahl von Namen zur Verfügung, und so konnte ein und dieselbe Zahl auf die mannigfaltigste Art bezeichnet werden, was den Versdichtern eine grosse Erleichterung verschaffte. Bekanntlich liebten es die alten Inder sehr, mathematische Regeln und Aufgaben in Verse zu kleiden.

Dieser erste Stand der Zahlwortbildung musste bei fortschreitender Kultur bald überwunden werden. Wollten nämlich die Menschen für jede neue Zahl auch einen neuen Namen haben, so waren sie gezwungen, so viele Namen zu erfinden, als sie Zahlen gebrauchten. Dies hätte allzu grosse Anforderungen an das menschliche Gedächtnis gestellt. Einer solchen Gedächtnisüberbürdung konnte am einfachsten dadurch begegnet werden, dass man bei einer gewissen Zahl einen Ruhepunkt machte und die folgenden Zahlennamen durch Zusammensetzung bildete.

Die gewohnte Art der Abzählung an den Fingern wies den Weg, den man zu gehen hatte. Zunächst war jede Zahl mit einem besonderen Namen zu bezeichnen bis hinauf zu jener ersten Ruhepunktzahl; wir wollen diese mit b bezeichnen, um an das Wort Basis zu erinnern. Die hierauf folgenden Zahlen bekamen Namen, welche nach folgendem Schema gebildet wurden:

$$b + 1, b + 2, b + 3, \dots$$

Es war also nicht nötig, neue Zahlennamen aufzustellen, sondern man wandte die für die Einer geschaffenen Namen von neuem an. — Einen zweiten Ruhepunkt machte man bei b^2 , einen dritten bei b^3 , einen vierten bei b^4 , u. s. w.

So kam man dazu, die Namen der Zahlen nach folgendem Schema zusammenzusetzen:

$$a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 + \dots + a_k \cdot b^k + \dots$$

mit der Bedingung: $0 \leq a_k < b$ für jeden Index k .

Man brauchte also nur für folgende Zahlen selbständige und primitive Namen aufzustellen:

1. für die Einer: $0, 1, 2, 3, \dots, b-1$;
2. für die Stufenzahlen: b, b^2, b^3, b^4, \dots

Die Grenze, bis zu welcher man Namen für die Stufenzahlen bildete, richtete sich nach den Bedürfnissen des praktischen Lebens; bis ins Mittelalter kannte man in Europa keinen höheren Stufenzahlennamen als „tausend“, abgesehen vom griechischen $\muύριοι = 10000$. Die Wörter „Million“, „Milliarde“, „Billion“, „Trillion“, u. s. w., sind erst im 16. Jahrhundert oder noch später entstanden.

Ein einziges Volk der ganzen Erde hat hiervon eine Ausnahme gemacht und schon in den ältesten Zeiten eine sehr lange Reihe von Stufenzahlennamen ausgebildet: die alten Inder, welche bekanntlich, was Zählen und Rechnen anbetrifft, die Lehrmeister der zivilisierten Menschheit geworden sind. Die alten Buddhisten haben sogar ganze Bücher darüber geschrieben, wie man, durch Kombination verschiedener Silben, Namen

für Stufenzahlen von immer höherer Ordnung bilden kann. Sie trieben diese Namengebung bis zu einer Zahl, die wir als $10^{17 \cdot 2^{128}}$ definieren würden. *) Wollte man diese Zahl drucken, so würden ihre aneinander gereihten Nullen eine solche Länge erfordern, dass die Entfernung der Erde von der Sonne hierzu bei weitem nicht ausreichte, selbst unter Anwendung der kleinsten Druckschrift, die es gibt; man müsste vielmehr über eine Strecke verfügen, welche der Entfernung der Erde bis zu einem Sterne gleichkommt, dessen Licht 1000 Billionen Jahre braucht, um zu uns zu gelangen; dabei ist in Rechnung gezogen, dass das Licht in jeder Sekunde 300 000 Kilometer zurücklegt, und diese ganz ungeheure Strecke wäre erst ein Millionstel von der wirklichen Länge obiger Zahl!

Die verbreitetste aller Basiszahlen ist 10, und für diese Tatsache, dass gerade die Zahl 10 als erste Ruhepunktzahl auftritt, gibt es gar keinen anderen Grund als den, dass wir Menschen zehn Finger haben. — In vielen Sprachen ist fünf die Basiszahl, in einigen anderen ist es zwanzig. So befolgten die altkultivierten Azteken, die Ureinwohner von Mexiko, ein vigesimales Zahlensystem. Ebenso herrschte in der keltischen Sprache die Grundzahl zwanzig, und ein Überbleibsel davon ist die noch heutzutage übliche vigesimale Zählung im Französischen zwischen 60 und 100, ferner im Dänischen zwischen 40 und 100.

Wären die Zahlwörter nicht von Menschen im Kindesalter der Kultur, sondern von Gelehrten am Schreibtisch erfunden und gebildet worden, so hätten diese gewiss nicht die Zahl zehn, sondern vier oder sechs als Basis gewählt.

Was nun den schriftlichen Ausdruck der Zahlen anbelangt, dessen Entwicklung wir jetzt in aller Kürze andeuten wollen, so lassen sich dabei mehrere Prinzipien unterscheiden. Auf unsystematische Bezeichnungen, wozu auch die Darstellung der Zahlen durch die Buchstaben des Alphabetes zu rechnen ist, soll hier gar nicht weiter eingegangen werden.

Das erste, eine strenge Gesetzmässigkeit ausdrückende Prinzip ist das sogenannte *additive Prinzip*.

Die römischen Ziffern sind ein Beispiel seiner Anwendung. Es liegt auf der Hand, jeden der zu zählenden Gegenstände durch einen einfachen Strich zu ersetzen. So sind *die natürlichen Zahlzeichen* entstanden:

I, II, III, IIII,

nicht nur bei den Römern, sondern noch bei sehr vielen anderen Völkern.

*) v. Schiefner, Bulletin de l'Académie des Sciences de St-Pétersbourg, t. V, p. 299.

Solche „natürliche Zahlzeichen“ wurden auch von den Azteken angewandt; doch wird bei ihnen jedem Gegenstand ein Kreis zugeordnet, wenigstens von 1 bis 20. Die Zahl 16 z. B. wird durch 16 nebeneinander gezeichnete Kreise dargestellt. In den mexikanischen Hieroglyphen sind diese farbig ausgeführt und wahrscheinlich Bilder der grossen runden Körner, mit welchen jenes Volk zählte und rechnete. Zur konsequenten Anwendung des additiven Prinzips müssen noch Zeichen für die Stufenzahlen vorhanden sein. So wird, bei der vigesimalen Zählmethode der Azteken, 20 durch eine kleine Fahne dargestellt, ferner $20^2 = 400$ durch eine Feder, $20^3 = 8000$ durch einen vollen Beutel. Als Beispiel diene die Zahl 9876:

1 Beutel	zur Bezeichnung von	8000
4 Federn	„ „ „	$4 \cdot 400 = 1600$
13 Fähnlein	„ „ „	$13 \cdot 20 = 260$
16 Kreise	„ „ „	<u>16</u>
34 Zeichen	„ „ „	9876

Man ersieht auch hieraus, dass das additive Prinzip schon bei nicht sehr hohen Zahlen auf lange und deswegen unbequeme Ausdrücke führt, und es nimmt Zeit, bis man sich gleichsam durch die Zahl hindurch-addiert hat.

Dem additiven Prinzip gegenüber steht das sogenannte *multiplikative Prinzip*. Dieses ist unter anderem von den Chinesen in ihrer Zifferschrift konsequent durchgeführt. Will man die Zahlen nach dem multiplikativen Prinzip darstellen, so braucht man ein besonderes Zeichen für jeden Einer

$$1, 2, 3, \dots, b-1$$

und ein besonderes Zeichen für jede Stufenzahl

$$b, b^2, b^3, b^4, \dots$$

Um dieses Prinzip durch ein Beispiel zu illustrieren und dabei doch nicht die komplizierten chinesischen Zeichen anzuwenden, will ich die uns geläufigen römischen Zeichen für die Stufenzahlen benutzen:

$$10 = X, 100 = C, 1000 = M, 10\,000 = (|), \text{ u. s. w.}$$

Unter dieser Annahme erhält man

für 1889	den Ausdruck	1 M 8 C 8 X 9
„ 1080	„ „	1 M 8 X
„ 10008	„ „	1 () 8
„ 180	„ „	1 C 8 X

Die chinesische Schrift weist 14 Zeichen für die 14 ersten aufeinanderfolgenden Stufenzahlen auf.

Erst in dieser Methode war im schriftlichen Systeme derselbe Grad der Vollkommenheit erreicht, auf dem man sich im gesprochenen Zahlensysteme schon längst befand.

Eine dritte Methode zur Darstellung der Zahlen liefert *das Markenprinzip*, von *H. Hankel* auch *elevatorisches Prinzip* genannt. Hiernach braucht man nur Zeichen für die Einer; die Stufenzahlen werden durch Marken, etwa durch Punkte oder Kreise, angedeutet:

1889	wird	ausgedrückt	durch	$\overset{\circ}{\underset{\circ}{1}} \overset{\circ}{\underset{\circ}{8}} \overset{\circ}{\underset{\circ}{8}} \overset{\circ}{\underset{\circ}{9}}$	oder	$\overset{\circ}{\underset{\circ}{1}} \overset{\circ}{\underset{\circ}{8}} \overset{\circ}{\underset{\circ}{8}} \overset{\circ}{\underset{\circ}{9}}$
1008	"	"	"	$\overset{\circ}{\underset{\circ}{1}} \overset{\circ}{\underset{\circ}{8}}$	"	$\overset{\circ}{\underset{\circ}{1}} \overset{\circ}{\underset{\circ}{8}}$
1080	"	"	"	$\overset{\circ}{\underset{\circ}{1}} \overset{\circ}{\underset{\circ}{8}}$	"	$\overset{\circ}{\underset{\circ}{1}} \overset{\circ}{\underset{\circ}{8}}$
180	"	"	"	$\overset{\circ}{\underset{\circ}{1}} \overset{\circ}{\underset{\circ}{8}}$	"	$\overset{\circ}{\underset{\circ}{1}} \overset{\circ}{\underset{\circ}{8}}$

Eine vierte Darstellungsweise, welche im früheren Mittelalter in ganz Europa angewandt wurde, könnte als *Kolonnenprinzip* bezeichnet werden. Bei Anwendung dieses Prinzipes können die Zahlen nicht frei geschrieben werden, sondern nur auf eine Tafel, die eine Reihe von Kolonnen enthält, welche nach ihrer Folge die Stufenzahlen I, X, C, M, ((|)), als Überschrift tragen:

	(())	M	C	X	I
9876		9	8	7	6
1080		1		8	
10008	1				8
180			1	8	

Es ist ein weiterer Schritt in der Verbesserung, in der Kürzung der multiplikativen Zifferschrift: man lässt nämlich auch alle Marken, überhaupt alle Zeichen für die Stufenzahlen, weg; freilich ergibt sich dadurch ein grosser Nachteil: es sind besonders eingerichtete Rechenbretter notwendig. Schon die Griechen und Römer haben solche gebraucht und ihnen den Namen *ἄβαξ*, bzw. *abacus*, gegeben.

Das letzte Prinzip, das ich hier erwähne, ist *das Positionsprinzip* oder *Prinzip des Stellenwertes*, nach welchem heute alle zivilisierten Nationen ihre Zahlen schreiben.

Wie ist man wohl zu diesem Prinzip gekommen? Für jemanden, der das „Markenprinzip“ und das „Kolonnenprinzip“ kennt, scheint die Antwort äusserst einfach. Man braucht ja nur ein Füllzeichen, ein Zeichen für Nichts! Dann kann man, auch bei Fortlassung aller Stufenzahlenzeichen und aller Marken, Zahlen wie 1008, 180, 18, ohne weiteres voneinander unterscheiden. — Aber die grössten Denker und Rechner des

Altertums haben diesen Gedanken nicht gehabt; er muss also doch nicht so natürlich und naheliegend sein, wie er uns heutzutage erscheint. Es kommt uns recht merkwürdig vor, dass ein Genie wie *Archimedes*, der grösste Mathematiker des ganzen Altertums, der die kompliziertesten Berechnungen mit einem kolossalen Aufwand an Mühe und Zeit durchführte, der die Schwerfälligkeit seiner Zifferschrift sicherlich gefühlt hat, nicht eine vollkommeneren schuf. Wie sollte aber auch ein Römer oder ein Grieche, der immer nur die Wirklichkeit der Welt ins Auge fasste, auf den Gedanken verfallen, dass man für etwas, das gar nicht da ist, ein Zeichen, also etwas Wirkliches setzen könne? Kein anderes Volk als das der Inder war dazu prädestiniert, die Null zu erfinden; sie liebten es ungemein, sich mit phantastisch grossen Zahlen zu beschäftigen; sind es doch auch die alten Inder, welche das *Nirvâna*, d. h. das Leere, das Zerfliessen in Nichts, als höchstes und letztes Ziel des Daseins hinstellten. „Die Inder“, so drückt sich ein Schriftsteller geistreich aus, „haben in dem Nichts ein brauchbares Etwas gesehen und durch das Nichts die Vollendung des Etwas bewirkt“. Dieses Nichts, die Null, nannten die Araber *šifar*, d. h. wörtlich „das Leere“; aus dieser Wurzel stammt unser Wort „Ziffer“; es bedeutete also ursprünglich nur die Null, wie noch heute im Englischen.

Durch welche Zwischenstufen hindurch sich nun aus den älteren Ziffersystemen, in denen manchmal mehrere Prinzipien in ganz inkonsequenter Weise gleichzeitig angewandt wurden, das Positionsprinzip in seiner jetzigen Klarheit entwickelt hat, ist noch nicht ganz sichergestellt. Dass aber die Erfindung der Null und des Ziffersystems mit Stellenwert den Indern zufällt, steht ausser allem Zweifel. Nur sind es die Araber gewesen, welche diesen Schatz aus dem sagenhaften Indien geholt und ihn dem Abendland übermitteln haben. Dadurch wird die noch oft gebrauchte Bezeichnung „arabisches System“ erklärt — und in gewissem Sinn auch gerechtfertigt. Die Erfindung des Positionssystems bildet einen Abschluss in der theoretischen Vervollkommnung der Zifferschrift; denn es ist das Ideal erreicht: mit Hülfe von zehn einfachen Zeichen jede noch so grosse Zahl in kürzester und klarster Weise zu bezeichnen. Hierzu genügen sogar zwei Zeichen, die Null und die Eins, wenn man die Basis b gleich 2 wählt (binäres oder dyadisches Zahlensystem).

Die Bedeutung des Begriffes „Zahl“ erfuhr schon im grauen Altertum eine wesentliche Erweiterung. Unter „Zahl“ verstand man nicht mehr allein das Resultat einer Zählung, sondern auch jedes Resultat des Messens. Dies eröffnet eine dritte Phase in der Entwicklung des Zahlenbegriffes. Bei der Operation des Messens findet nämlich das Abzählen

eine sehr häufige und wichtige Anwendung, gilt es doch, zu bestimmen, wie oft eine gewählte Einheit in der zu messenden Grösse enthalten sei. Die Bedürfnisse einer sich immer mehr ausbreitenden Kultur veranlassten nun zum Messen, zwangen auch zum Teilen. Dabei kamen nicht immer ganze Zahlen heraus; so fassten denn die Menschen allmählig den Begriff der „gebrochenen Zahl“ und führten die Zahlenbrüche ein.

Bekanntlich hat *Pythagoras* die Zahl zum Prinzipie der Dinge gemacht, indem er sagte: „Die Dinge sind Zahlen“. Es ist schwierig, eine zu der Mathematik der Pythagoräer passende Bedeutung in den Wortlaut dieses Ausdruckes hineinzulegen. Diese Worte können kaum etwas anderes bedeuten als dass alle Dinge sich durch Zahlen bestimmen lassen. Da hierbei nicht wohl von etwas anderem die Rede sein kann als von der Grösse der Dinge, so wird gesagt, dass es möglich sei, die Grösse der Dinge durch Zahlen auszudrücken und zwar durch ganze oder durch gebrochene Zahlen, weil keine anderen bekannt waren. — Nun entdeckte man aber schon im Altertum, dass dem nicht so ist. Man fand z. B. heraus, dass die Länge der Diagonale eines Quadrates, dessen Seiten sämtlich gleich der Längeneinheit sind, durch keine derartige Zahl ausgedrückt werden kann, weder durch eine ganze, noch durch eine gebrochene.

Dies führte im Laufe der Zeit dazu, die Bedeutung des Wortes „Zahl“ abermals zu erweitern: man schuf die sogenannten *irrationalen Zahlen*. Die spätere Entwicklung hat gezeigt, dass dieselben in zwei grosse Kategorien zerfallen: einerseits die algebraischen Irrationalitäten, andererseits die transzendenten Zahlen.

Dem französischen Mathematiker *Joseph Liouville* (24. März 1809 bis 8. September 1882) gebührt das Verdienst, die Existenz dieses sehr tief liegenden und prinzipiell wichtigen Unterschiedes zum erstenmal bewiesen zu haben. Einen Anstoss hierzu gab wohl die Frage nach der „Quadratur des Zirkels“, die Zahl $\pi = 3,1415926 \dots$, welche angibt, wie oft ein Kreisdurchmesser in der zugehörigen Kreisperipherie enthalten ist (vgl. F. Rudio: „Das Problem von der Quadratur des Zirkels“). Die Überzeugung, es sei diese Zahl π überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten, hatte sich bei den Mathematikern allmählig gebildet. Schon *Leonhard Euler* (1707 bis 1783) und *Legendre* (1752 bis 1833) hatten diese Vermutung ausgesprochen; *Lambert* (geboren 1728 zu Mülhausen, gestorben 1777 als Oberbaurat in Berlin) hatte sie geradezu zu einem Satze formuliert und zum Beweise desselben aufgefordert. Aber man hatte doch bis 1844 gar keinen positiven Anhaltspunkt dafür, dass es überhaupt Zahlen gebe, welche nicht Wurzeln irgendeiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein können. *Liouville* war der

erste, der hierfür einen strengen Beweis lieferte*), indem er Zahlen von einfachem Bildungsgesetze herstellte, von denen sich nachweisen liess, dass sie keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen. Als solches Beispiel führt er unter anderem an:

$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{ll_1} + \frac{1}{ll_1l_2} + \dots + \frac{1}{ll_1l_2\dots l_{m-1}} + \dots$$

Bedeuteten hierin $l, l_1, l_2 \dots$ ganze Zahlen, und wächst l_m hinreichend rasch mit dem Index m , so lässt sich zeigen, dass x nicht Wurzel irgend einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein kann. — Seit dieser wichtigen Liouvilleschen Entdeckung ist man berechtigt, alle Zahlen in algebraische und transzendente einzuteilen, während man früher nur von rationalen und irrationalen Zahlen sprechen konnte. Unter einer *algebraischen* Zahl versteht man jetzt jede Zahl x , welche Wurzel einer algebraischen Gleichung ist, d. h. einer Gleichung von der Form:

$$x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_n = 0,$$

in welcher die Koeffizienten c_1, c_2, \dots, c_n sämtlich rationale Zahlen sind, während der höchste Koeffizient immer gleich 1 vorausgesetzt wird. Sind überdies diese Koeffizienten sämtlich [ganze Zahlen, so heisst x eine ganze algebraische Zahl. Unter einer transzendenten Zahl versteht man jede nicht algebraische Zahl.

Es würde hier zu weit führen, diese Entwicklungsrichtung näher zu verfolgen; denn sie leitet zu Betrachtungen über den Unendlichkeitsbegriff und dadurch auf das Gebiet der Philosophie hinüber.

Alle bisher angegebenen Bedeutungen des Wortes „Zahl“ werden unter dem gemeinschaftlichen Namen *reelle Zahlen* zusammengefasst. Man gelangte also zu⁴ diesem allgemeinen Begriffe dadurch, dass man unter einer Zahl nicht allein das Resultat des Abzählens, sondern überhaupt das Ergebnis einer Messung verstand.

Eine vierte Erweiterung hat der Zahlenbegriff durch die moderne Mathematik erfahren; man kann sie durch folgende Definition charakterisieren: *Unter einer Zahl ist jedes Objekt menschlichen Denkens zu verstehen, mit welchem man rechnen kann.* Durch die Theorie der Gleichungen wurden die Mathematiker zu dieser Erweiterung veranlasst. Diese Auffassung hat zu den *negativen* und zu den *allgemeinen komplexen Zahlen* geführt. Sie hat ferner Ernst Eduard Kummer (geboren 29. Januar 1810 in Sorau, gestorben 14. Mai 1893 in Berlin) die Idee zur Schöpfung der *idealen Zahlen* eingeflösst; sie hat schliesslich Hrn. Georg Cantor den Gedanken zur Bildung der *transfiniten* oder *überendlichen* Zahlen gegeben.

*) Liouvilles Journal, Bd. XVI (1851).

An einem Beispiele möchte ich zeigen, welcher Weg dabei eingeschlagen werden kann.

Wir betrachten zwei beliebige reelle Zahlen a und b und denken uns dieselben in irgend einer Weise miteinander verbunden, ich möchte fast sagen: zusammengeheftet oder zusammengeschiedet, so dass sie nur noch ein Ganzes bilden. Dieses neue Gedankending heisst *ein Zahlenpaar*, die Zahlen a und b *Komponenten* des Zahlenpaares; sie können einander gleich oder voneinander verschieden sein. Es ist offensichtlich möglich, unendlich viele solcher Zahlenpaare zu bilden. Diese betrachten wir nun als Objekte unseres mathematischen Denkens. Wenn wir uns dann die Aufgabe stellen, mit solchen Zahlenpaaren zu rechnen, so behandeln wir diese Gedankendinge gerade so, als ob es Zahlen wären, obgleich sie in Wirklichkeit etwas viel komplizierteres sind. Folgendes Bild ist geeignet, den Unterschied zu veranschaulichen: man betrachte zwei metallische Stäbchen als Darstellung der zwei Komponenten und denke sich dieselben an dem einen ihrer Endpunkte gelenkartig miteinander verbunden; es entsteht dadurch ein Ding, das einem kleinen Zirkel ähnlich sieht, und dieser ist dann eine Versinnlichung des Zahlenpaares. Gerade so wie nun ein Wesensunterschied besteht zwischen dem Zirkel als Ganzem und den beiden metallischen Stäbchen, *bevor* sie in dieser eigentümlichen Weise miteinander verbunden waren, so herrscht auch ein prinzipieller Unterschied zwischen dem Zahlenpaar einerseits, den beiden getrennt gedachten Komponenten andererseits. Es tritt eben noch die charakteristische Verknüpfung zu einem Ganzen hinzu; diese soll im Folgenden stets durch Einklammerung der Komponenten angedeutet werden: (a, b) wird gesprochen: „Zahlenpaar a, b “.

Rechnen heisst bekanntlich, aus zwei gegebenen Grössen nach bestimmten Gesetzen eine dritte ableiten. Wir stellen uns also jetzt die Aufgabe, aus zwei Zahlenpaaren (a, b) und (c, d) , nach festgesetzten oder noch festzusetzenden Regeln, ein drittes Zahlenpaar abzuleiten. Zu diesem Behufe müssen wir angeben, was unter der „Gleichheit zweier Zahlenpaare“, was unter ihrer „Summe“, was unter ihrem „Produkt“ verstanden werden soll; zunächst die Definition ihrer „Gleichheit“:

Zwei Zahlenpaare mögen stets und nur dann *einander gleich* heissen, wenn ihre entsprechenden Komponenten übereinstimmen.

In Zeichen: $(a, b) = (c, d)$, wenn gleichzeitig $a = c$, $b = d$.

Eine Gleichung zwischen solchen Zahlenpaaren zieht demnach zwei Gleichungen zwischen reellen Zahlen nach sich.

Wir lassen die Erklärung der *Summe* zweier Zahlenpaare folgen; diese muss wieder ein Zahlenpaar sein. Es gelte die ganz willkürliche Festsetzung:

„Zahlenpaare werden addiert, indem man die entsprechenden Komponenten addiert“; in Zeichen:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Dadurch ist die *Addition* im Bereiche dieser Zahlenpaare definiert. Wirft man nun die Frage nach der inversen Operation auf, so ergibt sich, dass „die *Differenz* zweier Zahlenpaare“ immer existiert und nach folgender Regel gebildet wird:

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d).$$

Gehen wir nun zur *Definition der Multiplikation* über; wir setzen, abermals ganz willkürlich, folgendes fest:

„Das Produkt aus zwei solchen Zahlenpaaren (a, b) und (c, d) ist wieder ein Zahlenpaar, für dessen Komponenten das Bildungsgesetz gilt, welches in der Gleichung

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \text{ enthalten ist.}.$$

Durch diese Formel wird eine „Multiplikation“ im Bereich unserer Zahlenpaare in eindeutiger Weise festgelegt; stellt man wieder die Frage nach der inversen Operation, so muss sie in bejahendem Sinne beantwortet werden. Es existiert nämlich im allgemeinen ein Zahlenpaar (x, y) von der Beschaffenheit, dass

$$(c, d) \cdot (x, y) = (a, b),$$

wenn (a, b) und (c, d) beliebig vorgeschrieben werden:

Aus der Beziehung

$$(cx - dy, cy + dx) = (a, b)$$

und der Definition der „Gleichheit von Zahlenpaaren“ entspringen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} cx - dy &= a \\ dx + cy &= b, \end{aligned}$$

deren Auflösung lautet: $x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$, $y = \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}$

Hieraus ersieht man, dass der „Quotient des Zahlenpaares (a, b) durch das Zahlenpaar (c, d) “ im allgemeinen eindeutig bestimmt ist und nach folgender Regel gebildet wird:

$$(a, b) : (c, d) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2} \right)$$

Ich wiederhole, dass diese Definitionen a priori ganz willkürlich sind, dass man mit gleichem Rechte die Operationen und die Gleichheit anders definieren könnte.

Nimmt man aber obige Definitionen an, so sieht man erstens ein dass ein Zahlenpaar existiert, welches genau dieselbe Rolle spielt, wie die Null im Gebiete der reellen Zahlen; es ist das Zahlenpaar $(0, 0)$. In der Tat:

$$(a, b) \pm (0, 0) = (a, b),$$

d. h. durch Addition oder Subtraktion von $(0, 0)$ wird kein Zahlenpaar geändert; ferner:

$$(a, b) \cdot (0, 0) = (0, 0),$$

d. h. multipliziert man irgend ein Zahlenpaar mit $(0, 0)$, so kommt immer $(0, 0)$ heraus.

Durch diese Eigenschaften wird aber „die Null“ im Bereiche der gewöhnlichen Zahlen charakterisiert. Wir werden uns also nicht mehr die Mühe geben, jedesmal das ganze Zahlenpaar $(0, 0)$ zu schreiben; zur Abkürzung werden wir vielmehr schreiben und sprechen: 0 statt $(0, 0)$. Wir müssen uns aber dabei immer bewusst bleiben, dass dieses Zeichen 0 etwas ganz anderes vorstellt als die Null, welche vor vielen Jahrhunderten die alten Inder erfunden haben; hier bedeutet es gleichsam eine stenographische Abkürzung für das Zahlenpaar $(0, 0)$.

Nimmt man die vorigen Definitionen an, so sieht man zweitens ein, dass ein Zahlenpaar existiert, welches genau dieselbe Rolle spielt wie „die Eins“ im Gebiete der gewöhnlichen Zahlen; es ist das Zahlenpaar $(1, 0)$. In der Tat ergibt sich:

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b),$$

$$(a, b) : (1, 0) = \left(\frac{a}{1}, \frac{b}{1}\right) = (a, b),$$

und diese zwei Eigenschaften: beim Multiplizieren und beim Dividieren jede Grösse ungeändert zu lassen, sind charakteristisch für die Zahl 1. Wir werden demnach auch in diesem Fall eine bequeme Abkürzung anwenden und statt „Zahlenpaar $(1, 0)$ “ schreiben und sprechen: 1.

Dritte Überlegung: man erkennt, dass diejenigen Zahlenpaare, deren zweite Komponente Null ist, eine Untergruppe für sich innerhalb des Bereiches aller dieser Zahlenpaare bilden.

Eine verschwindende zweite Komponente reproduziert sich nämlich bei den vier rationalen Operationen: zunächst bei Addition und Subtraktion:

$$(a, 0) \pm (c, 0) = (a \pm c, 0),$$

ferner bei Multiplikation und Division, wie aus den Formeln

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (a c, 0)$$

$$(a, 0) : (c, 0) = \left(\frac{a}{c}, 0\right) = \left(\frac{a}{c}, 0\right) \text{ hervorgeht.}$$

Wir werden also auch in diesem Falle nicht jedesmal das ganze Zahlenpaar schreiben, sondern die zweite Komponente, wenn sie Null ist, ganz unterdrücken und zur Abkürzung schreiben und sprechen: a , statt „Zahlenpaar $(a, 0)$ “.

Daraus schliessen wir nun umgekehrt, dass jede reelle Zahl b als Zahlenpaar aufgefasst werden kann, nämlich als ein solches, dessen zweite Komponente Null ist:

$$b = (b, 0).$$

Diese Erkenntnis gestattet folgende Zerlegung:

$$(a, b) = a + b \cdot (0, 1).$$

Es ist in der Tat nach den früher aufgestellten Definitionen von Multiplikation und Addition zunächst:

$$b \cdot (0, 1) = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b),$$

dann:

$$a + b \cdot (0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b).$$

Diese Zerlegung weist dem Zahlenpaare $(0, 1)$ eine besonders interessante Rolle zu. Nun findet man durch Anwendung der Multiplikationsregel:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Das ist aber ein Zahlenpaar von der besonderen Beschaffenheit, dass seine zweite Komponente verschwindet; wir können es also nach dem oben Ausgeführten abkürzend mit (-1) bezeichnen. Die zuletzt erhaltene Gleichung geht dann in folgende über:

$$(0, 1)^2 = -1,$$

woraus: Zahlenpaar $(0, 1) = \sqrt{-1}$.

Es schlug aber schon *Gauss* für $\sqrt{-1}$ eine Abkürzung vor, die sich überall eingebürgert hat, nämlich den Anfangsbuchstaben des Wortes „imaginär“:

$$\sqrt{-1} = i.$$

Somit hat sich ergeben: *Zahlenpaar* $(0, 1) = i$.

Das Endresultat dieser Überlegungen ist folgender Lehrsatz:

Jedes der hier betrachteten Zahlenpaare (a, b) lässt sich in der Form

$$(a, b) = a + b \cdot i$$

darstellen, wobei das Symbol i durch die Gleichung:

$$i^2 = -1$$

definiert ist.

Mit anderen Worten: die Zahlenpaare, die wir hier untersucht haben, sind mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen, den sogenannten *imaginären Zahlen*, identisch. Diese „imaginären Zahlen“ sind demnach Gedankendinge, die nur deswegen den Titel „Zahlen“ verdienen, weil mit ihnen nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra gerechnet werden kann; sie sind aber weder das Ergebnis des Abzählens, noch das Resultat irgend einer Messung.

Das Gleiche lässt sich von den *negativen Zahlen* aussagen.

Es ist auch nicht schwierig, die Definitionen von „Gleichheit“, von „Addition“ und von „Multiplikation“ zweier Zahlenpaare so zu gestalten, dass durch diese Festsetzungen ein Bereich umgrenzt wird, dessen Elemente, ihren Eigenschaften nach, sich mit den negativen Zahlen als identisch erweisen. Man könnte demnach mit gleichem Recht auf die negativen Zahlen das Eigenschaftswort „imaginär“ anwenden, wie auf die Gauss'schen komplexen Zahlen.

Es ist nun leicht, die Richtung zu übersehen, nach welcher dieser neue Zahlenbegriff sich entwickelte: es wurde die Anzahl der Komponenten vermehrt. So schuf man Zahlentripel, indem man drei reelle Zahlen a, b, c derart miteinander verbunden und verknüpft dachte, dass sie ein einziges Gedankending bildeten: (a, b, c) , und man ging dazu über, für diese Zahlentripel die Gleichheit, die Addition und die Multiplikation zu definieren.

Andere Mathematiker nahmen vier Komponenten an und bildeten Zahlenquadrupel $\begin{Bmatrix} a, b \\ c, d \end{Bmatrix}$, für welche sie dann die Rechnungsoperationen definierten. Das bekannteste und wichtigste Beispiel von Zahlenquadrupeln sind die *Quaternionen*, welche vom englischen Mathematiker *William Rowan Hamilton* (4. August 1805 bis 2. September 1865) entdeckt, zum erstenmal studiert und auf zahlreiche Probleme der Geometrie, der Physik, der Mechanik, u. s. w. angewandt wurden. Auf diese Weise schuf der menschliche Geist die *allgemeinen komplexen Zahlen*, wohl auch *hyperkomplexe Zahlen* genannt, mit beliebig vielen Komponenten. A priori können die Rechnungsoperationen in diesen Bereichen von hyperkomplexen Zahlen nach ganz willkürlich festgesetzten Regeln ausgeführt werden. Es stellt sich aber heraus, dass dann die gewöhnlichen Eigenschaften der arithmetischen Operationen nicht immer erhalten bleiben.

Bedeutet z. B. α und β zwei Quaternionen, so ist im allgemeinen das Produkt $\alpha \cdot \beta$ vom Produkt $\beta \cdot \alpha$ verschieden, die Multiplikation also „nicht kommutativ“; in anderen Bereichen von hyperkomplexen Zahlen existieren „Nullteiler“, d. h. es kann ein Produkt Null sein, ohne dass ein einziger Faktor verschwindet; oder es hat „das distributive Gesetz“, welches durch die Formel

$$a (b + c) = a b + a c$$

ausgedrückt wird, keine Gültigkeit; kurz, bei vielen Systemen von hyperkomplexen Zahlen wird *das Prinzip von der Permanenz der formalen Gesetze* durchbrochen. Es würde aber viel zu weit führen, auf diese teilweise noch ungelösten Fragen einzugehen; deswegen soll hier nur ihre Existenz angedeutet werden.

Das letzte Stadium der Entwicklung besteht darin, unendlich viele Komponenten anzunehmen; dadurch gelangt man zu den *transfiniten* oder *überendlichen Zahlen*.

Man betrachte die sämtlichen überhaupt existierenden ganzen Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge: 1, 2, 3, 4, ... in infinitum, und denke sich dieselben derart miteinander verbunden und verknüpft, dass sie nur noch ein grosses Gedankending bilden, was wieder durch Einklammerung angedeutet werden mag:

$$(1, 2, 3, 4, \dots \text{ in infinitum } \dots)$$

Dieses aus unendlich vielen Elementen bestehende ungeheure Objekt mathematischen Denkens heisst, nach Hrn. *G. Cantor*, *die erste transfinite Zahl* und wird mit ω bezeichnet.

Man bekommt ein Beispiel von der Begrenztheit menschlicher Einbildungskraft, wenn man es versucht, sich diese transfinite Zahl ω vorzustellen, etwa mit gewöhnlichen Ziffern gedruckt: das ganze Weltall bis über die weitesten Fernen hinaus müsste von aneinander- und übereinandergereihten Ziffern erfüllt sein, und wenn jemand, um alle Komponenten zu überblicken, sie an seinem geistigen Auge vorbeiziehen lassen wollte, wenn auch mit denkbar grösster Geschwindigkeit, so würde er dazu unendlich lange Zeit brauchen. — Es ist Hrn. Cantor gelungen, unendlich viele solcher transfiniten Zahlen zu definieren und aus diesem eigentümlichen Zahlenmaterial eine vollständige Arithmetik aufzubauen, die allerdings ganz wesentlich von der gewöhnlichen abweicht.

Es leuchtet ein, dass auch diese Entwicklungsrichtung auf den Begriff des Unendlichen und damit auf das Gebiet der Philosophie hinüberführt. Überhaupt nimmt die Mathematik in gewissem Sinn eine zentrale Stellung ein; denn sie grenzt einerseits an Philosophie und Logik, d. h. an die abstraktesten spekulativen Wissenschaften, während sie andererseits durch ihre zahllosen Anwendungen aufs engste mit der Praxis zusammenhängt. Ohne das Hilfsmittel einer gut ausgebildeten und in die Tiefe dringenden theoretischen Mathematik hätte es die Technik wohl nicht zu den grossen Errungenschaften gebracht, die wir heute mit Recht bewundern.