

Der Rechenunterricht

Autor(en): **Geissbühler, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische pädagogische Zeitschrift**

Band (Jahr): **23 (1913)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-788779>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Der Rechenunterricht.

Im Auftrage des Schweizerischen Seminarlehrervereins bearbeitet von
J. Geissbühler, Seminarlehrer, Muristalden, Bern.

I. Bildungswert des Rechnens und Aufgabe des Rechenunterrichts.

Der Rechenunterricht will dem Schüler Gelegenheit bieten, sich eine möglichst weitgehende Rechenfertigkeit anzueignen. Einer solchen bedarf er vom Beginn der Schulzeit an durch das ganze Leben hindurch, sowohl für seine eigene Person als auch für seine Stellung in der Gesellschaft. Jeder Mensch, auch wenn er sich in den bescheidensten Verhältnissen bewegt, muss selber rechnen können, wenn er nicht von andern abhängig und jeder Übervorteilung ausgesetzt sein soll. Kenntnis der Zahlen, die Fähigkeit, Werte richtig zu beurteilen, bilden eine wesentliche Grundlage des materiellen Wohles für jedes Individuum. Die einfachste Betätigung im Haushalt, die Ausübung irgendeines Berufs, fordern Rechenfertigkeit. Wer nicht rechnen kann, nimmt in der Gesellschaft eine klägliche Stellung ein. Rechnen gehört mit Lesen und Schreiben nach allgemeiner Schätzung zu den Elementen der Bildung. Mit dem Urteil: „Er kann nicht rechnen!“ wird die persönliche und soziale Minderwertigkeit eines Menschen ausgesprochen.

Je höher der Kulturstand, desto grösser sind auch die Anforderungen bezüglich der rechnerischen Fertigkeit des Einzelnen. Für spezielle rechnerische Ausbildung sorgen zwar die Berufsschulen. Die Volksschule hat aber ihre Schüler bezüglich Rechenfertigkeit so auszurüsten, dass ihnen der Eintritt in die höhere Schule ermöglicht wird. Einem guten Rechner stehen zu seinem persönlichen Fortkommen mehr Türen offen als dem schwachen Rechner. In der Gesellschaft (Gemeinde, Korporation) sind rechnerisch tüchtig geschulte Elemente von hohem Wert.

Dem praktischen Nutzen des Rechnens entsprechend, räumt der Lehrplan der Volksschule dem Rechenunterricht auf allen Schulstufen einen weiten Raum ein. An technischen Schulen und Real-Gymnasien dominieren die mathematischen Unterrichtsfächer, wodurch an die aus der Volksschule herkommenden Rekruten auch höhere Anforderungen gestellt werden in bezug auf ihre mathematische Vorbildung. Im Hinblick auf die hohe Bedeutung der Rechenkunst

leistet die Volksschule dem Einzelnen wie der Gesamtheit einen um so grösseren Dienst, je weiter sie die Rechenfertigkeit ihrer Schüler fördert.

Für die Zahlen und ihre Beziehungen zueinander interessiert sich das Kind bereits im vorschulpflichtigen Alter. Das Viel und das Wenig, mehr und minder, die Zahl als solche, spielen schon im kindlichen Spiele eine bedeutende Rolle. Die Zahlbildung schliesst allseitige Förderung der Geistestätigkeiten in sich, Wahrnehmungs- und Anschauungsvermögen werden durch den Besitz von sicheren Zahlvorstellungen gesteigert zum bewussten Sehen, Hören, Ertasten der Grössen und ihrer Verhältnisse. Zahlen wecken das empirische Interesse. Durch die Anordnung konkret dargestellter Zahlen wird der Sinn für Symmetrie und damit das ästhetische Interesse angeregt. Am meisten jedoch wird das spekulative Interesse genährt durch die Beziehung der Zahlen aufeinander, durch Aufdeckung der Einordnung der Zahlen zum Zahlensystem, durch Betrachtung der Werte und der Masse. „Die Arbeit mit Zahlbegriffen führt zu Zahlurteilen und Schlussbildungen, die zusammengenommen eine Schulung im Denken darstellen, wie sie exakter und folgerichtiger auf keinem anderen Gebiete möglich ist“. (Walsemann.) Bildung klarer Begriffe, folgerichtiges Denken, Schulung des Verstandes sind die notwendigen Folgen des Rechnens. „Allerdings ist nicht zu verkennen, dass der Rechenunterricht ein Licht ist, das mehr erhellt als erwärmt.“ (Rude.) Aber ganz leer lässt die rechnerische Arbeit das Gemüt doch nicht. Schon dem jungen Schüler bieten die Zahlen ein Gebiet für die eigene Forschung. Jeder eigene Fund, jeder Sieg weckt lebhafteste Lustgefühle. Auch der Rechenunterricht kann dem Kinde zur Quelle grosser Freude werden. Die Lösung eines Problems regt den Willen zu intensiver Arbeit an. Die richtige sprachliche Formulierung eines Zahlurteils oder einer Schlussbildung gewährt eine sprachliche Übung, so wie die saubere schriftliche Darstellung einer Zahloperation Gelegenheit zu schönem Schreiben bietet. So liegt in der Zahlenlehre ein hoher ideeller Bildungswert, der um so mehr zur Geltung kommt, je sorgfältiger der Rechenunterricht durchgeführt wird.

Das Rechnen ist eine formale Tätigkeit. Aber es lässt sich auf alle Gebiete der realen Welt übertragen und veranlasst den Schüler zu genauem Anschauen der realen Welt und zum Bearbeiten von Gebieten, die vom Realunterricht nur nebenbei oder gar

nicht berührt werden. Im angewandten Rechnen werden, sofern die Aufgaben der Wirklichkeit entsprechen, Sachkenntnisse verbreitet. Namentlich die Gebiete der Haus- und Volkswirtschaft, des Handels und Verkehrs werden durch angewandte Rechenübungen beleuchtet.

Der Bildungswert des Rechnens ist: 1. ein praktischer, indem es zur Erfüllung des individuellen und sozialen Lebenszweckes befähigt, 2. ein formaler, indem er das Individuum durch Entwicklung seiner geistigen Fähigkeiten vervollkommnet.

Soll der Bildungswert des Rechnens dem Schüler zugute kommen, muss der Rechenunterricht eine dreifache Aufgabe lösen: Er soll dem Schüler

1. einen klaren Einblick verschaffen in die Zahlen und in den Aufbau des Zahlensystems,
2. zur Gewandtheit im raschen und sicheren Durchführen der elementaren Zahloperationen verhelfen,
3. Gelegenheit bieten zur Anwendung der Rechenfertigkeit im bürgerlichen Rechnen.

Nach diesen drei Zielen hin bewegt sich der Rechenunterricht von Anfang an. Die Anpassung an die wachsende geistige Kraft des Schülers geschieht in der naturgemässen Abgrenzung der auf jeder Stufe zu bearbeitenden Zahlgebiete und der vernünftigen Auswahl der im Unterrichte zu verwendenden Sachgebiete.

II. Der Lehrstoff des Rechenunterrichts.

Im Rechnen werden nach Massgabe bestimmter Sachverhältnisse Zahlen aufeinander bezogen zur Ermittlung einer neuen zu suchenden Zahl. Kenntnis der Sachverhältnisse vermitteln:

1. Die Lebenserfahrung (Hauswirtschaft, Handel usw.),
2. Der Schulunterricht im allgemeinen (Volkswirtschaft, Handel, Verkehr),
3. Der mathematische Unterricht im besonderen (Geld- und Warenverkehr, Raumberechnung).

Sache des Rechenunterrichts bleibt, dem Schüler Einblick zu verschaffen in die Zahlen und in die verschiedenen Arten, die Zahlen aufeinander zu beziehen. (Operieren.) Zahlkenntnis und Fertigkeit im Operieren bilden die notwendigen Vorbedingungen zum Berechnen, d. i. zum Lösen eines Problems, das einem im Leben zufällig oder im Unterricht absichtlich vorgelegt wird. Der Rechenunterricht hat sich demnach zu befassen mit: 1. den Zahlen, 2. den Zahloperationen, 3. dem Berechnen, als Vorübung zum Lösen

von Problemen, wie sie im bürgerlichen Leben auftreten. In allen drei Gebieten ist die Arbeit unbegrenzt. Der Rechenunterricht kann nur den Anfang machen und die Arbeit so weit fördern, als die Umstände gestatten. (Geistige Begabung der Schüler, Unterrichtszeit.) Wie hoch das unter den gegebenen Umständen zu erreichende Ziel steht, hängt ab von der Qualität des Unterrichts bezüglich der Methode und vom Lehrgeist, der die Schüler zum freudigen Arbeiten anregt.

A. Die Zahlenlehre.

1. Die Zahl. Über das Wesen der Zahl sind von Philosophen, Mathematikern und Rechenmethodikern die mannigfaltigsten Definitionen aufgestellt worden. Für die Rechenpraxis im Volksschulunterricht haben diese Definitionen nichts zu bedeuten. Einzig die Definition Pestalozzis vermag die richtige Zahlbehandlung zu bestimmen. Ihm ist die Zahl „die einfache Folge der Elementarkraft, durch welche wir uns das Verhältnis des Mehr und Minder in allen Anschauungen zum klaren Bewusstsein bringen.“ Die für den Rechenunterricht in Betracht fallenden Zahlen sind: Die Einheit, als die Bezeichnung eines einzig in seiner Art dastehenden unter den Gegenständen und Erscheinungen der Aussenwelt. (Eine Sonne.) Die Vielheit, die Bezeichnung von unter sich gleichartigen Gegenständen und Erscheinungen. (Viele Sterne.) Der Bruchteil einer Einheit. Die Null als die Bezeichnung für das Fehlen eines Gegenstandes oder einer Erscheinung (nie zu spät gekommen.). Der Gebrauch von algebraischen und von relativen Zahlen kann nur in den günstigsten Schulverhältnissen und da nur in untergeordnetem Masse auftreten. Durch sukzessives Hinzufügen von Einheiten entsteht die natürliche Zahlenreihe von 0 zu 1, 2, 3 u. s. f. bis ∞ . Jede Zahl ist um eine Einheit grösser als die vorhergehende. Das Hinzufügen von Einheiten, wodurch aus einer Zahl die nächstfolgende, oder das Wegnehmen von Einheiten, wodurch aus einer Zahl die vorausgehende Zahl gebildet wird, heisst Zählen (vorwärts und rückwärts zählen). Neben der natürlichen Zahlenreihe können künstliche Reihen gebildet werden, wobei statt im Schrittmass der Einheit in demjenigen einer gewissen Vielheit oder eines Bruchteils fortgeschritten wird, z. B.

0, 7, 14, 21 ∞

0, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, 3, $3\frac{3}{4}$ ∞

2. Die Zahlbildung. Die Zahlen müssen im Bewusstsein

des Schülers vorhanden, also vollkommen sicher vorstellbar sein, wenn damit gerechnet werden soll. Die Zahl an sich lässt sich zwar nicht vorstellen; die Zahlvorstellung geschieht durch Beziehung auf wirkliche Dinge. Für den Rechenunterricht ist die natürliche Art der Zahlbildung massgebend. Auge, Ohr und Tastorgan sind so beschaffen, dass die in der Aussenwelt liegenden Objekte nach räumlicher Anordnung, zeitlicher Folge und physischer Beschaffenheit aufgefasst werden können. Eine Häufung von unter sich gleichen Objekten zerlegt sich vor den Sinnen in Einzelobjekte, die der Reihe nach einzeln wahrgenommen werden können. Um aus einer Summe von Gegenständen das Gleichartige (Vielheit), das Ungleichartige (Einheit) und das Fehlende (Null) zu sondieren, ist in erster Linie die zuverlässige Arbeit der Sinne nötig. In den Gegenständen der Aussenwelt liegt die Zahlbestimmtheit. Durch die Sinnestätigkeit wird davon die Zahlerkenntnis gewonnen. Anfänglich ist die Zahl an die Gegenstände, welche die Zahl darstellen, gebunden. Wiederholtes Auffassen (Erkennen) einer und derselben Zahl an verschiedenen Gegenständen (4 Fenster, 4 Kinder, 4 Tafeln, 4 Hände, 4 Striche, 4 Schläge) lässt von den Gegenständen absehen. Das bei allen diesen Wahrnehmungen Gleichartige — die Vierzahl — wird selbständig. Aus der Zahlerkenntnis wird unter wechselnder Wiederholung des Erkennungsprozesses das Zahlbewusstsein gebildet.

Am frühesten treten dem Kinde die Zahlen eins, null, viel ins Bewusstsein. Jede Mehrheit erscheint zuerst schlechtweg als viel. Das Viel gliedert sich zunächst in „nicht so viel“, „viel“ und „recht viel“. Durch Zufügen und Wegnehmen von Einheiten (Finger einer Hand) lernt ein normal veranlagtes Kind schon vor Schuleintritt die Zahlen 2, 3, 4, 5 unterscheiden. (2 Augen — Löffel, Gabel, Messer — 4 Räder am Wagen, 5 Finger an der Hand.) Ein blosses Hersagen der Zahlenreihe bürgt keineswegs dafür, dass die Zahlen im Bewusstsein liegen. Der Unterricht muss daher die Zahlen dem Schüler zum Bewusstsein bringen auf Grund sinnlicher Wahrnehmung durch Auffassen und Darstellen mittels wirklicher Gegenstände oder Realzeichen, bei denen so viel Einheiten enthalten sind, als der Zahl zukommen.

|||| :: × × × × □

Die Auffassung der Zahl geschieht um so rascher und sicherer, je mehr sich das Kind um die Arbeit interessiert. Das Interesse wird

gesteigert durch Verwendung auffallender Gegenstände, denen das Kind eine innere Teilnahme entgegenbringt. Die Darstellungsarbeit wird aus dem nämlichen Grunde zu einem Darstellen der Zahlen in wirklichen Gegenständen, Aufkleben farbiger Papiere oder Formen von Kugeln, Legen von Stäbchen oder Knöpfen nach Massgabe der darzustellenden Zahl, statt dass die Zahl nur mit Realzeichen graphisch wiedergegeben wird. (Handarbeit im Dienste des elementaren Rechnens.)

Sobald das Kind beim Hören oder Aussprechen des Zahlwortes den Zahlinhalt sich deutlich denken kann, die Zahl also nicht mehr an Gegenstände gebunden, sondern zu freier Verfügung im Bewusstsein des Kindes ist, hat es eine klare Zahlvorstellung. Klare Zahlvorstellungen bilden die notwendige Voraussetzung zum Rechnen. Zuerst müssen die Vorstellungen Null und Eins gebildet sein. Durch Hinzufügen der Einheit zu der bereits vorhandenen Zahl werden die Zahlbegriffe 2, 3, 4, 5 gebildet. Soweit ist die Begriffsbildung auf dem gewöhnlichen Anschauungswege möglich. Grössere Zahlen lassen sich inhaltlich nicht mehr überblicken. Sie können zwar auf dem Wege des Zählens gebildet werden. Aber dieses Geschäft ist zeitraubend und führt nicht zu einem freien Einblick in den Zahlinhalt. Leicht ermöglicht wird aber dieser Einblick in den Zahlinhalt, wenn die ersten 5 als Einheit höherer Ordnung aufgefasst wird und die Zahlen 6, 7, 8, 9, 10 durch Hinzufügen der bereits bekannten 1, 2, 3, 4, 5 zu der 5 gebildet werden. Ihre Darstellung geschieht am besten durch Verwendung der römischen Ziffern VI, VII, VIII, VIII. Mit der Einführung der Zahl 10 ist der Grund gelegt zur Auffassung des Zehnersystems. Kenntniss des Zehnersystems ermöglicht direkte Bildung von Zahlbegriffen ohne das Mittel der Anschauung.

Zur Bildung der Bruchzahlen (gemeine Brüche mit kleinen Nennern) muss der Weg der Veranschaulichung gegangen werden. Ein Ganzes (Kreis, Stab, Linie) wird in eine Anzahl unter sich gleicher Teile geteilt. Die Teile werden der Teilung entsprechend benannt, und die Teile werden gezählt. Durch Teilung des Ganzen in 2, 3, 5, 7 gleiche Teile werden die Halben, Drittel, Fünftel, Siebentel gebildet. Aus der Zweiteilung dieser Bruchteile gehen die Viertel, Sechstel, Zehntel, — aus der Dreiteilung die Sechstel, Neuntel, Zwölftel — aus zweimaliger Zweiteilung die Achtel und Sechzehntel hervor. Kleinere Bruchteile werden nicht mehr augenfällig, sondern auf dem Rechnungswege gebildet.

3. D a s Z a h l e n s y s t e m. Da nur eine verhältnismässig

beschränkte Zahl von Zahlbegriffen — nämlich die Grundzahlen 1—10 und die Brüche, deren Nenner eine Grundzahl ist — auf dem Wege der Anschauung gebildet werden kann, muss das unendliche Mass von Zahlen durch systematische Gliederung geordnet werden. Jede Mehrheit kann mit *e i n s* gemessen werden. Durch Verwendung als Mass eines Zahlinhaltes wird *e i n s* zum *E i n s e r*. Auch jede andere Zahl kann als Mass dienen, der Zweier, Fünfer, Siebner u. s. f. Als allgemein gebräuchliches Zahlenmass findet der *Z e h n e r* — der Inbegriff von 10 Einheiten — Verwendung. Zehnfaches Zusammenlegen des Zehners lässt den Hunderter entstehen, der 10 Zehner oder 100 Einer umfasst. Der Tausender erscheint als Zusammenfassung von 10 Hundertern oder 100 Zehnern oder 1000 Einern. Dieses Prinzip befolgend, wird ein höheres Zahlmass gebildet aus 10 Einheiten niederer Sorte; ebenso werden von 1 abwärts kleinere Zahlmasse gebildet durch Zehnteilung der Eins, des Zehntels, des Hundertstels u. s. f. Zusammenfassen von 10 Einheiten niederer Sorte zu einer Einheit höherer Sorte, und umgekehrt, das Auflösen einer Einheit höherer Sorte in 10 Einheiten niederer Sorte ist das Prinzip des *d e z i m a l e n Z a h l e n s y s t e m s*. Die Einheiten der verschieden grossen Zahlenmasse werden durch die nämlichen Zahlzeichen dargestellt. Die Unterscheidung der Masse geschieht durch ihre Stellung. An die *E i n s e r* reihen sich nach links die Zehner, Hunderter u. s. f., nach rechts, von der Einerstelle durch ein *K o m m a* geschieden, die Zehntel, Hundertstel u. s. f. Dadurch wird das Zehnersystem zu einem *P o s i t i o n s s y s t e m*, in dem der hinter jedem Zahlzeichen steckende Zahlenwert aus der Stellung des Zahlzeichens ersichtlich ist. Mit der Verwendung der Null als Positionszeichen für fehlende Zahlmasse ist jede Zahl durch Verwendung der 10 Zahlzeichen (Ziffern) darstellbar. Aus jeder dargestellten Zahl ist der Wert ohne weiteres ersichtlich. Niemand kann behaupten, die Zahl 314807,403 in Wirklichkeit gesehen zu haben; aber jeder, der das Zehnersystem kennt, hat einen vollkommen klaren Einblick in diese Zahl. Daraus ist ersichtlich, welche ungeheure Bedeutung die Kenntnis des Zehnersystems hat. Durch den Einblick in das Zehnersystem wird das Zählen zu einem richtigen Aneinanderreihen klarer Zahlbegriffe.

4. *D i e b e n a n n t e n Z a h l e n*. Denkt man bei der Wahrnehmung einer Zahl nur an ihren Inhalt oder an ihre Stellung im Zehnersystem, so hat man die *r e i n e Z a h l*. Bei ihr fällt nur die Quantität, nicht aber die Qualität in Betracht. Das praktische Rech-

nen befasst sich aber mit **W e r t e n** und **M a s s e n**. Bezieht sich eine Zahl auf irgendein Mass, so erscheint sie als **b e n a n n t e** **Z a h l**. Bei ihr fällt neben der Quantität auch die Qualität in Betracht. (Einfach und mehrfach benannte Zahl.) In der Zahl 2 Fr. 67 Rp. ist 2, rein genommen, weniger als 67, infolge der Benennung wird das Verhältnis dieser beiden Zahlen ein ganz anderes. Zur richtigen Auffassung der benannten Zahlen ist die **K e n n t n i s** **d e r g e b r ä u c h l i c h e n M a s s e u n d M ü n z e n** notwendig.

Unser Münzsystem sowohl als auch das metrische System sind vorzügliche Veranschaulichungsmittel zum Erfassen des dezimalen Zahlensystems. Setzt man den Franken als Einer, so erscheinen das 10 Fr. Stück, die Hunderternote, die Tausendernote als Zehner, Hunderter, Tausender; das Zehnrappenstück als Zehntel, der Rappen als Hundertstel. Noch deutlicher wird die Veranschaulichung vermittelt des Längenmasses, weil die räumliche Ausdehnung dem Positionswert entspricht. Wird der Meter als Einheit genommen, so entsprechen die höhern Einheiten den höhern Zahleinheiten, während in der Einteilung des Meters die Dezimalbrüche dargestellt sind.

mym	km	hm	dam	M,	dm	cm	mm
Zt	T	H	Z	E,	z	h	t

Den klarsten Einblick in den Aufbau des Zehnersystems gewährt das Körpermass. Setzen wir den cm^3 als Einheit, so stellen die mm^3 die Dezimalbrüche, die cm^3 die Einer-Ordnung, die dm^3 die Tausender-Ordnung, die m^3 die Million dar.

<u>.. dam³</u>	<u>.. m³</u>	<u>.. dm³</u>	<u>.. cm³</u> ,	<u>.. mm³</u>
<u>Tsder</u>	<u>Einer</u>	<u>Tsder</u>	<u>Einer</u>	<u>Dez.Br.</u>
Millionen		Einer	,	Brüche

Zum praktischen Rechnen begnügt man sich mit den wirklich gebräuchlichen Massen, setzt diese aber zueinander in Beziehung, damit das System in die Augen springt (s. Tab. oben S. 162).

Die nicht dezimalen Masse eignen sich vorzüglich zur Veranschaulichung der gemeinen Brüche, so die Duodezimalen-Zählmasse: Stück, Dutzend, Gross und die Zeitmasse: Tag, Stunde, Minute, Monat, Jahr.

B. Das Operieren.

1. **D a s Z a h l u r t e i l**. Zwei oder mehr Zahlbegriffe, also inhaltlich vollkommen klar gedachte Zahlen, können aufeinander

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
km ²	ha	a	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
			m ³	dm ³	cm ³	mm ³
				hl l dl		
			t	g kg	g	

bezogen werden. Der nämliche Fall liegt vor bei Zahlen, die inhaltlich leicht überblickbar dargestellt sind durch sinnlich wahrnehmbare Gegenstände oder Zeichen. In beiden Fällen führt die Vergleichung der Zahlen zu einer Erkenntnis. Die Erkenntnis wird sprachlich in ein Urteil gekleidet, graphisch durch eine Gleichung dargestellt. Es seien die Zahlen 2 und 6 aufeinander zu beziehen. Die Erkenntnisurteile werden, gestützt auf den Augenschein oder auf eine sichere Vorstellung, die dem Augenschein gleichkommt, lauten:

2 ist kleiner als 6

6 „ grösser „ 2

6 „ mehr „ 2

2 „ weniger „ 6

2 und 6 werden miteinander abgemessen. Dieses **Abmessen** führt zu den Urteilen:

6 ist um 4 grösser als 2

2 „ „ 4 kleiner als 6

2, um 4 vergrössert, ist 6

6, um 4 verkleinert, ist 2

6 ist so gross wie 2 + 4 zusammen.

Der Unterschied zwischen 6 und 2 ist 4.

Es kann der Inhalt der 6 mit dem Inhalt von 2 ausgemessen werden. Das **Ausmessen** führt zu den Urteilen:

6 ist drei mal 2

In 6 stecken drei Zweier

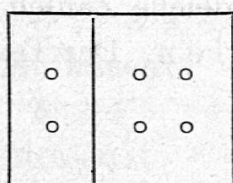
Der dritte Teil von 6 ist 2.

Das Abmessen führt zu **additiven**, das Ausmessen zu **multiplikativen** Zahlurteilen. Die Zahlurteile erscheinen als unumstössliche Wahrheiten, wenn sie durch konkrete Darstellung

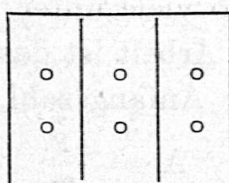
greifbar verkörpert sind. Das Erfassen der Wahrheit ist die direkte Folge sinnlicher Wahrnehmung. Wiederholtes Erkennen der nämlichen Wahrheit führt zu gedächtnismässigem Behalten derselben, den nämlichen Erfolg verspricht scheinbar auch das Vor- und Nachsprechen des Zahlurteils. In diesem Falle ist jedoch die eingelernte Wahrheit wertlos, weil sie nicht eine Erkenntnis zur Voraussetzung hat.

Die Verkörperung des Zahlurteils geschieht durch Gegenstände (Finger, Kugeln, Würfel), Zeichen (Zahlbilder) oder durch lebhaftere Vorstellung. Ist dieses letztere der Fall, wird die sinnenfällige Verkörperung überflüssig.

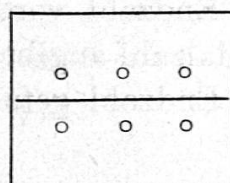
Verkörperung der Zahlurteile bezüglich 2 und 6:



$$\begin{aligned} 2 + 4 &= 6 \\ 4 + 2 &= 6 \\ 6 - 4 &= 2 \\ 6 - 2 &= 4 \\ 6 &= 2 + 4 \\ 6 &= 4 + 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2 + 2 + 2 &= 6 \\ \underline{3 \times 2} &= 6 \\ 6 &= 3 \times 2 \\ 6 : 2 &= 3 \\ \frac{1}{3} \cdot 6 &= 2 \\ *) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 6 &= 3 + 3 \\ 6 &= 2 \times 3 \\ \frac{1}{2} \cdot 6 &= 3 \\ 6 : 3 &= 2 \end{aligned}$$

Das Zahlurteil enthält 3 Glieder. Die Bestimmung eines Gliedes aus den beiden andern heisst operieren.

2. Die Operationen. Je nach der Art des Zahlurteils (additiv oder multiplikativ) und je nachdem eines der Anfangsglieder oder das Endglied zu bestimmen ist, erhalten wir vier verschiedene elementare Operationen. Für die additiven Zahlurteile haben wir die Anfangszahlen A und B, und die Endzahl C. Die beiden Anfangszahlen zusammengenommen, gleichgültig, in welcher Reihenfolge, ergeben als Endzahl die Summe mit einem Inhalt, der demjenigen der beiden Anfangszahlen gleichkommt. Die Ermittlung der Summe heisst Addition oder Zuzählen, wenn zu einer Anfangszahl die Einheiten der andern zugezählt werden.

$$A + B = C \quad B + A = C \quad C = A + B$$

*) Der Bruch wird auf der Elementarstufe als abgekürzte Darstellung des Teilens verwendet:

$$\frac{1}{3} = \text{der dritte Teil,} \quad \frac{2}{3} = 2\text{-mal der dritte Teil.}$$

Es wird aus der Endzahl und der einen Anfangszahl die andere ermittelt, oder von der Endzahl die eine Anfangszahl weggezählt, so dass als Rest die andere Anfangszahl bleibt. Das Geschäft heisst **S u b t r a k t i o n** oder **W e g z ä h l e n**.

$$C - A = B \quad C - B = A \quad C - ? = A$$

Für die multiplikativen Zahlurteile haben wir eine Anfangszahl, eine Malzahl und eine Endzahl. Die Anfangszahl so oft mal hinsetzen als die Malzahl angibt, führt zur Ermittlung der Summe mehrerer gleicher Zahlen. Das Resultat ist die Endzahl, das Produkt. Die Operation heisst **M u l t i p l i k a t i o n**.

$$m A = P; \quad A + A + A \dots m = P.$$

Die Endzahl wird in so viele unter sich gleiche Zahlen zerlegt, als die Malzahl angibt. Die Arbeit ist das **T e i l e n**. Der Teil ist die aus der Endzahl gefundene Anfangszahl.

$$A = \frac{P}{m}$$

Aus dem Produkt kann durch wiederholtes Wegnehmen der Anfangszahl ermittelt werden, welches die Malzahl sei. Die Anzahl der Verminderungsgeschäfte entspricht der Malzahl. Diese Operation ist ein **M e s s e n**.

$$m = \frac{P}{A}$$

Teilen und Messen werden als **D i v i s i o n** bezeichnet. Im schriftlichen Operieren mit reinen Zahlen werden beide Geschäfte gleich dargestellt. Im mündlichen Rechnen und im Rechnen mit benannten Zahlen müssen die beiden Divisionsgeschäfte streng auseinandergehalten werden. Der Malzahl folgt stets die Bezeichnung „m a l“.

Z u s a m m e n s t e l l u n g d e r O p e r a t i o n e n .		
Zahlurteil:		
Zu bestimmen:	Endzahl	<i>Additiv:</i> Addition Summe
	Anfangszahl	<i>Subtraktion:</i> Unterschied
		<i>Multiplikativ:</i> Multiplikation Produkt.
		<i>Division:</i> Teilen Teil Messen Malzahl

Die Durchführung aller möglichen elementaren Operationen an einer Zahl heisst *monographische Zahlbehandlung*: z. B. 8:

1. Zerlegen:

$$8 = 1 + 7 \quad 2 + 6 \quad 3 + 5 \quad 4 + 4$$

2. Aufbauen:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 7 \quad 2 + 6 \quad 3 + 5 \quad 4 + 4 \\ 7 + 1 \quad 6 + 2 \quad 5 + 3 \end{array} \right\} = 8$$

3. Abbrechen:

$$\begin{array}{l} 8 - 1 \quad 8 - 2 \quad 8 - 3 \quad 8 - 4 \quad 8 - 5 \\ 8 - 6 \quad 8 - 7 \quad 8 - 8 \quad 8 - 0 = ? \end{array}$$

4. Maliges Zerlegen:

$$8 = 2 \times 4 \quad 4 \times 2 \quad 8 \times 1$$

5. Aufbauen:

$$8 \times 1 \quad 4 \times 2 \quad 2 \times 4 \quad 2 \times 3 + 2$$

6. Messen:

$$8 : 2 \quad 8 : 4 \quad 8 : 8 =$$

7. Teilen:

$$\frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \quad \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \quad \frac{1}{8} \cdot 8 = 1$$

C. Das Berechnen.

Zahlerkenntnisse werden im angewandten Rechnen verwertet. Die Rechenarbeit tritt in der Form von Aufgaben an den Schüler heran. Das praktische Leben stellt Aufgaben, die auf bestimmten sachlichen Verhältnissen fussen. Kenntnis der Sachverhältnisse ist die erste Bedingung zur Lösung der Aufgabe. Durch Schlussfolgerung muss aus der Aufgabe der Plan zur Lösung (Ansatz) festgestellt werden. Dieser Plan weist die anzuwendenden Operationen an. Die Möglichkeit einer richtigen Lösung setzt richtige Durchführung der vorgezeigten Operationen voraus. Der Schüler muss richtig operieren können.

Obschon das Berechnen das Endziel des Unterrichts bedeutet, muss doch das Operieren oder Rechnen im engeren Sinn den breitesten Raum im Unterricht einnehmen. In der Sicherheit im Operieren liegt die Rechenfertigkeit. Die Aufgaben, welche der Rechenunterricht an den Schüler stellt, sind daher Rechenaufgaben zur Übung des formalen, und Berechnungsaufgaben, zur Pflege des angewandten Rechnens. Die Lösung der Aufgabe führt zu einem Resultat.

Wird vom Resultat aus der umgekehrte Lösungsweg eingeschlagen, zeigt es sich, ob das Resultat richtig sei oder nicht. (Probe.) Nur das richtige Rechnen hat für den Schüler einen Wert.

1. Die Rechen-Aufgaben. Sie kennzeichnen sich dadurch, dass in ihnen die anzuwendende Operation vollkommen klar angedeutet ist. Sie dienen also als Material zur formalen Übung und zur Aufdeckung des Rechenverfahrens, indem aus einer Anzahl ähnlicher Aufgaben der Weg der Lösung abstrahiert wird. Die Aufgaben können sich auf eine oder auf mehrere Operationen erstrecken. (Zusammengesetzte Aufgaben). In den Aufgaben können reine oder benannte Zahlen verwendet werden. Die Lösung kann mündlich oder schriftlich durchgeführt werden. Im letztern Falle hat man das Zifferrechnen, während das mündliche Rechnen als Kopfrechnen bezeichnet wird. Dieses hat jenem voranzugehen. Bei beiden Lösungsarten können verschiedene Verfahren zur Anwendung gelangen. Neben dem Haupt- oder Normalverfahren ist oft, je nach der Art der vorliegenden Zahlen, ein kürzerer Weg — ein Rechenvorteil — anzuwenden. Wird unter Verwendung verschiedener Verfahren das nämliche Resultat erzielt, so liegt in dieser Erscheinung die Bürgschaft für das richtige Rechnen:

Aufgaben-Beispiele.

- | | |
|--|--|
| 1. $87 + 96 = ?$ | 5. $8 \text{ kg} : 160 \text{ g} = ?$ |
| 2. $16 \times 27 \text{ kg} = ?$ | 6. $\frac{27 \cdot (30 - 26)}{(100 + 37)} = ?$ |
| 3. $5 \text{ Fr. } 35 \text{ Rp.} - 3 \text{ Fr. } 95 \text{ Rp.} = ?$ | |
| 4. $33 \text{ m } 60 \text{ cm} : 7 = ?$ | |

Lösungen.

a) Kopfrechnen:

- | | |
|---|---|
| 1. $87 + 96 = ?$ | oder: $87 + 13 = 100.$ |
| $87 + 90 = 177.$ | $100 + 83 = 183.$ |
| $177 + 6 = \underline{183.}$ | $87 + 96 = \underline{183.}$ |
| 2. $16 \times 27 \text{ kg} = ? \text{ kg.}$ | oder: $16 = 4 \times 4.$ |
| $10 \times 27 \text{ kg} = 270 \text{ kg.}$ | $4 \times 27 \text{ kg} = 108 \text{ kg.}$ |
| $6 \times 27 \text{ kg} = 162 \text{ kg.}$ | $4 \times 108 \text{ kg} = 432 \text{ kg.}$ |
| $16 \times 27 \text{ kg} = \underline{432 \text{ kg.}}$ | $16 \times 27 \text{ kg} = \underline{432 \text{ kg.}}$ |
| 3. $5 \text{ Fr. } 85 \text{ Rp.} - 3 \text{ Fr. } 95 \text{ Rp.}$ | oder: $3 \text{ Fr. } 95 \text{ Rp.} + 5 \text{ Rp.} = 4 \text{ Fr.}$ |
| $5 \text{ Fr. } 85 \text{ Rp.} - 3 \text{ Fr.} = 2 \text{ Fr. } 85 \text{ Rp.}$ | $4 \text{ Fr.} + 1 \text{ Fr. } 85 \text{ Rp.} = 5 \text{ Fr. } 85 \text{ Rp.}$ |
| $2 \text{ Fr. } 85 \text{ Rp.} - 90 \text{ Rp.} = 1 \text{ Fr. } 95 \text{ Rp.}$ | $5 \text{ Rp.} + 1 \text{ Fr. } 85 \text{ Rp.} = \underline{1 \text{ Fr. } 90 \text{ Rp.}}$ |
| $1 \text{ Fr. } 95 \text{ Rp.} - 5 \text{ Rp.} = \underline{1 \text{ Fr. } 90 \text{ Rp.}}$ | |

$$\begin{array}{ll}
 4. & 33 \text{ m } 60 \text{ cm} : 7 = ? \text{ m u. cm.} \\
 & 28 \text{ m} : 7 = 4 \text{ m.} \\
 & 5 \text{ m } 60 \text{ cm} : 7 = 80 \text{ cm.} \\
 & 33 \text{ m } 60 \text{ cm} : 7 = \underline{4 \text{ m } 80 \text{ cm.}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 5. & 8 \text{ kg} : 160 \text{ gr} = ? \text{ mal.} \\
 & 800 \text{ gr} : 160 \text{ gr} = 5 \text{ mal.} \\
 & 8000 \text{ gr} : 160 \text{ gr} = 50 \text{ mal.} \\
 & 8 \text{ kg} : 160 \text{ gr} = \underline{50 \text{ mal.}}
 \end{array}$$

$$6. \quad \frac{27 + (30 + 26)}{(100 - 37)} = \frac{27 \times 56}{63} = \frac{3 \cdot 9 \times 8 \cdot 7}{9 \cdot 7} = 3 \times 8 = \underline{24.}$$

b) Zifferrechnen:

$$\begin{array}{lll}
 1. & \begin{array}{r} 87 \\ + 96 \\ \hline = 183 \end{array} & 2. \quad 16 \times 27 \text{ kg} = \underline{423 \text{ kg.}} \\
 & & \begin{array}{r} 162 \\ 27 \\ \hline 432 \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 3. \quad \begin{array}{r} 5 \text{ Fr. } 85 \text{ Rp.} \\ - 3 \text{ Fr. } 95 \text{ Rp.} \\ \hline = 1 \text{ Fr. } 90 \text{ Rp.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 4. & \begin{array}{r} 33 \text{ m } 60 \text{ cm} : 7 = \underline{4 \text{ m } 80 \text{ cm.}} \\ 28 \\ \hline 56 \\ 56 \\ \hline 0 \end{array} & 5. \quad \begin{array}{r} 8 \text{ kg} : 160 \text{ gr} = \\ 8000 \text{ gr} : 160 \text{ gr} = \\ 8000 : 160 = \underline{50.} \\ 80 \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

Mitunter empfiehlt sich zur Lösung ein gemischtes Verfahren; so dass beim Kopfrechnen Teilresultate notiert oder beim schriftlichen Rechnen leichtere Operationen im Kopf ausgeführt werden.

2. Berechnungs-Aufgaben. Diese sind so zu bemessen, dass die darin vorkommenden Sachverhältnisse dem intellektuellen Stande der Schüler entsprechen. Mit weitläufigen sachlichen Erörterungen verliert man die Zeit zum Rechnen. Die anzuwendenden Operationen müssen durch ein Schlussverfahren abgeleitet werden. Werden mehrere Berechnungsaufgaben der nämlichen Art gestellt, sinken sie zu blossen Rechenaufgaben herab.

Aufgaben-Beispiele.

1. Ein Beamter mit 4600 Fr. Jahresbesoldung zahlt für Miete 1000 Fr., an Steuern 250 Fr., für Lebensversicherung 350 Fr., und legt noch jährlich 600 Fr. in die Sparkasse. Wieviel darf er monatlich ausgeben?

2. $\frac{1}{2}$ kg Kaffee kosten Fr. 1.15. Was hat man für 32 kg zu bezahlen?

3. Welches Kapital trägt zu 4% 364 Fr. im Jahr?

4. Eine Ware wird mit 6% Gewinn zu Fr. 5.30 das Kilogramm verkauft. Wie gross war die Ankaufssumme für 180 kg?

5. Welches Gewicht hat eine Eisenkugel von 14 cm Durchmesser. Spez. Gew. 7,5?

6. An der Volksabstimmung vom 4. Februar 1912 wurden bei einer Beteiligung von 60% der Stimmberechtigten rund 290,000 Ja und 250,000 Nein abgegeben. Wieviel Prozent der Stimmberechtigten hat sich entschieden für Annahme des Gesetzes über Kranken und Unfallversicherung ausgesprochen?

7. Das Alter des A ist um 1 Jahr grösser, als das dreifache Alter des B. Wie alt ist B, wenn A 40 Jahre alt ist?

8. Mit welcher Geschwindigkeit fährt Zug Nr. 17, der die 60 km lange Strecke Bern-Olten zwischen 1⁴⁰ und 3³⁰ zurücklegt?

Lösungen:

Die Lösung angewandter Aufgaben setzt zum Teil bestimmte Vorkenntnisse voraus, so den Begriff Prozent, oder die Berechnungsweise einer geometrischen Form, oder die Anwendung eines bestimmten technischen Verfahrens (Gleichung, Proportion).

1. Aufgabe.

Die Besoldung beträgt 4600 Fr.

Davon gehen ab:

für Miete 1000 Fr.
 Steuern 250 „
 Lebensversicherung . 350 „
 Spareinlage 600 „

Total 2200 Fr.

Es verbleiben somit noch 2400 Fr.

Die monatliche Ausgabe darf $\frac{1}{12}$ von 2400 Fr. oder 200 Fr. betragen.

2. Aufgabe.

$\frac{1}{2}$ kg Fr. 1.15.
 1 „ $2 \times$ „ 1.15 = Fr. 2.30.
 32 „ $32 \times$ „ 2.30 = Fr. 73.60.

3. Aufgabe.

4% 364 Fr.
 1% $\frac{1}{4} \times 364$ „ = 91 Fr.
 100% 100×91 „ = 9100 Fr.

4. Aufgabe. Bei 6% Gewinn entspricht der Verkaufswert von Fr. 1.06 einem Ankaufswert von 1 Fr.

Verkauf Fr. 1.06 Ankauf 1 Fr.
 „ „ 5.30 $530 : 106 = 5$ „
 (So oftmal 1 Fr., als 106 in 530 enthalten ist.)

1 kg 5 Fr.
 180 „ 180×5 „ = 900 Fr.
 oder mit Anwendung des Bruchstriches:

$\frac{1.06}{1} \frac{1 \times 5,30 \times 180}{1,06} = \underline{900.}$
 5.30
 180

5. Aufgabe. Der Inhalt der Kugel ist π mal der 6. Teil des Durchmesserwürfels. $\frac{\pi d^3}{6}$. Spez. Gewicht 7,5 sagt: 1 dm³ Eisen 7,5 kg.

Durchmesser: 14 cm.
 Durchm.-Würfel: $14^3 = 14 \cdot 14 \cdot 2 \cdot 7$
 $= 196 \cdot 2 \cdot 7 = 2744 \text{ cm}^3$
 $\frac{1}{6} \cdot 2744 \text{ cm}^3 = 457\frac{1}{3} \text{ „}$
 $3\frac{1}{7} \cdot 457\frac{1}{3} \text{ „} = 1372$
 $+ 65\frac{1}{3}$
 $1437\frac{1}{3} \text{ cm}^3$

1 cm³ 7,5 gr.
 1000 „ 7 kg 500 gr.
 400 „ 3 „
 30 „ 225 „
 7 „ $52\frac{1}{2}$ „
 $\frac{1}{3}$ „ $2\frac{1}{2}$ „
10 kg 780 gr.

oder im Zifferrechnen

Gewicht = $\frac{22 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14}{7 \cdot 6} \cdot 7,5 \text{ gr.}$
 $= 11 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 2,5 \text{ gr.}$
 $= 10 \text{ kg } 780 \text{ gr.}$

6. Aufgabe.

Ja	290,000
Nein	250,000
Stimmende . .	<u>540,000</u>
60 %	540,000
10 %	90,000
100 %	900,000
900,000 Stimmberecht.	290,000 Ja
90	29
10	29 : 9 = 3,2
100	10 × 3,2 = 32.

Es haben sich 32 % der Stimmberechtigten für Annahme des Gesetzes ausgesprochen.

7. Aufgabe. Nimmt man vom Alter des A 1 Jahr weg, so bleiben 40 — 1 oder 39 Jahre. Das ist das dreifache Alter des B; er ist also 13 Jahre alt. Oder schriftlich:

$$\begin{aligned} \text{Das Alter des B ist } x \text{ Jahre.} \\ 3x + 1 &= 40. \\ 3x &= 40 - 1 = 39. \\ x &= \underline{13}. \end{aligned}$$

8. Aufgabe. Von 1^{40} bis 3^{30} sind 110 Minuten.

110 Minuten	60 km
11 „	6000 m
1 „	545,45 „

Der Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 545,45 m in der Minute.

Bei allen Berechnungsaufgaben muss der Schüler angehalten werden, das Resultat denkend zu prüfen. Durch Aufrunden oder Abrunden der gegebenen Zahlen soll das Resultat annähernd ermittelt werden. Geschieht dies, kann es nicht vorkommen, dass in der Schlussantwort das Dezimalkomma um eine Stelle nach rechts oder nach links verschoben erscheint.

3. Die Lösungsarten. Jede Aufgabe enthält das Material zu einem gesuchten Zahlurteil — der Antwort. Der Weg zu dem in der Antwort enthaltenen Schlussurteil führt durch einen oder mehrere Zwischenschlüsse. Damit der Schüler der im denkenden Rechnen liegenden Schulung des Verstandes teilhaftig werde, sind die Zwischenschlüsse sprachlich richtig formuliert laut auszusprechen, beim Zifferrechnen in Gleichungsform geordnet, leicht übersichtlich darzustellen. Der Auflösungsgang soll klar sein.

Beim Zahlenrechnen wird mit den grössten, beim Zifferrechnen mit den kleinsten Zahlbestandteilen begonnen (Division ausgenommen.) Erst wenn mit einer Rechnungsart der Lösungsweg vollkommen erfasst ist, begnügt man sich mit der Entgegennahme der gesuchten Antwort. Dies geschieht im sogenannten Schnellrechnen, jenem Rechenturnier, das so recht geeignet ist, die Rechenfertigkeit auf den höchsten Grad zu steigern. Bei den additiven Operationen bleibt die erste Zahl unverändert fest im Gedächtnis behalten. Die zweite wird sukzessive, Bestandteil um Bestandteil, hinzugefügt oder weggenommen. Oft lässt sich diese zweite Zahl durch Aufrunden

oder Abrunden handlicher gestalten, nur muss alsdann das Resultat korrigiert werden, z. B.:

$$\text{Fr. } 7.85 \pm \text{Fr. } 5.65 = \text{Fr. } 7.85 \pm 6 \text{ Fr. } \bar{7} 35 \text{ Rp.}$$

Bei den multiplikativen Operationen ist die gegebene Lösungsform der **Zweisatz**.

Beim **Multiplikations-Zweisatz** wird von der Einheit auf die Mehrheit, oder von einer beliebigen Zahl auf ein Vielfaches derselben geschlossen, z. B.:

$$\begin{array}{l|l} 1 \text{ m} & \text{Fr. } 3.25 \\ 7 \text{ m} & 7 \cdot \text{„ } 3.25 = \text{Fr. } 22.75. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 1\frac{1}{4} \text{ kg} & \text{Fr. } 2.80 \\ 6\frac{1}{4} \text{ kg} & 5 \cdot \text{„ } 2.80 = \text{Fr. } 14. — \end{array} \right.$$

Der **Teilungszweisatz** führt den umgekehrten Weg von der Mehrheit auf die Einheit oder von einer beliebigen Zahl auf einen Teil derselben, z. B.:

$$\begin{array}{l|l} 9 \text{ Stück} & \text{Fr. } 11.25 \\ 1 \text{ „} & \text{„ } 11.25 : 9 = \text{Fr. } 1.25. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 15 \text{ l} & \text{Fr. } 9.75 \\ 3 \text{ l} & \frac{1}{5} \cdot \text{„ } 9.75 = \text{Fr. } 1.95. \end{array} \right.$$

Teilungs- und Multiplikationszweisatz erscheinen vereinigt im **Dreisatz**, in der Weise, dass beide das eine Zahlerteil gemein haben, z. B.:

$$\begin{array}{l|l} 7 \text{ kg} & \text{Fr. } 15.05 \\ 1 \text{ kg} & \frac{1}{7} \cdot \text{„ } 15.05 = \text{Fr. } 2.15 \\ 5 \text{ kg} & 5 \cdot \text{„ } 2.15 = \text{„ } 10.75. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 21 \text{ m} & \text{Fr. } 25.20 \\ 7 \text{ m} & \frac{1}{3} \cdot \text{„ } 25.20 = \text{Fr. } 8.40 \\ 14 \text{ m} & 2 \cdot \text{„ } 8.40 = \text{„ } 16.80. \end{array} \right.$$

Ist einmal der Gedankengang klar, darf das abgekürzte Verfahren mit Anwendung des **Bruchstriches** eingeschlagen werden, z. B.:

$$\begin{array}{l} 4 \text{ ‰} \\ \frac{1}{4} \text{ ‰} \\ 3\frac{3}{4} \text{ ‰} \end{array} \quad \frac{17 \cdot 15}{16} = 15.93.$$

Beim **Messungszweisatz** ist eine Zwischenrechnung mit reinen Zahlen notwendig, mit welcher passende Formveränderungen an den Zahlen vorgenommen werden können. z. B.

$$\begin{array}{l|l} 375 \text{ gr} & 1 \text{ Port.} \\ 7 \text{ kg } 500 & (7500 : 375) = 20 \text{ „} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 2\frac{1}{4} \text{ m} \\ 27 \text{ m} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \text{ Stück} \\ (108 : 9) \\ 12 \text{ „} \end{array} \right.$$

Reiferen Schülern darf der Rechenunterricht auch die Lösungsformen der **Gleichung** und der **Proportion** lehren. Die Gleichung kann im geometrischen Rechnen mit Vorteil angewendet werden. Im bürgerlichen Rechnen leistet sie willkommene Dienste, wenn der Schüler eingesehen hat, dass sich Quantitäten

verhalten wie ihre Geldwerte, Kapitalien wie Zinse u. s. f., und wenn er gelernt hat, die Proportion in eine Gleichung zu verwandeln.

III. Geschichtliche Entwicklung des Rechnens.

Die ersten Spuren des Rechnens finden sich in den Zahlwörtern der Sprachen alter Kulturvölker. Die wörtliche Bezeichnung der Zahl machte schon früh die Systematisierung der Zahlenreihe notwendig, wobei durch Zusammensetzung einfacher Zahlwörter Bezeichnungen grösserer Zahlen gebildet werden konnten. So wurden unter Verwendung weniger Zahlwörter alle notwendigen Zahlbezeichnungen ermöglicht. Die deutsche Sprache verfügt nur über 14 Zahlwörter. Alle andern Zahlbezeichnungen sind Ableitungen und Zusammensetzungen primärer Zahlwörter. Ableitungen sind auch alle Ordnungs- und Bruchzahlwörter. Die Schwerfälligkeit der schriftlichen sprachlichen Zahlbezeichnung forderte schon frühe die Anwendung der Zahlzeichen oder Ziffern. Die primitivste Art der schriftlichen Zahldarstellung ist diejenige durch Striche (Kerbholz). Später wurden die Anfangsbuchstaben der Zahlwörter zur schriftlichen Zahlbezeichnung verwendet. Die Römer kamen mit 7 einfachen Zahlzeichen aus: I, V, X, L, C, D, M. Durch zweckmässige Zusammenstellung dieser Zeichen vermochten alle Zahlen dargestellt zu werden. MDCCCXII. Die arabischen Ziffern 1—9 sind Anfangsbuchstaben indischer Zahlwörter. Sie kamen von den Mauren in Spanien zu uns und fanden im 16. Jahrhundert allgemeine Verbreitung.

Zahlsysteme, d. i. die Zusammenfassung niederer Zahlen zu einer höheren Einheit, gibt es verschiedene. Das zunächstliegende ist das Fünfersystem, entsprechend den 5 Fingern an einer Hand. Überreste des Fünfersystems finden sich in der römischen Zifferschrift

I II III IIII V VI VII VIII VIII X

In der französischen Sprache finden sich noch Überreste eines (keltischen) Zwanziger-Systems (soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-seize). Aus dem Orient stammt das Zehnersystem. Es ist ein Positionssystem, indem jedem Zahlzeichen ausser seinem Zahlenwert noch ein Stellenwert zukommt, der von links nach rechts von Stelle zu Stelle um das Zehnfache abnimmt, von rechts nach links um das Zehnfache wächst. Seinen Ausbau erlangte das Zehnersystem mit der Verwendung der 0 als Bezeichnung einer leeren Stelle.

1. Fingerrechnen und Zähl-Instrumente.

Aus dem Fingerrechnen entwickelten sich das Fünfer- und das Zehnersystem. Der mangelhaften Zahlvorstellung wird ganz unwillkürlich mit der Zahldarstellung vermittelt der Finger aufgeholfen. Die Finger bilden das bei allen normal gestalteten Individuen gleich gebaute Rechen-Instrument, das immer zur Hand ist. Es ist nicht nur dem Auge zugänglich, sondern auch dem Tastsinn. Für das Rechnen innerhalb des ersten Zehners bilden die Finger das Universal-Veranschaulichungsmittel. Naturvölker bedienen sich auch kleiner gleichartiger Gegenstände, die an einer Schnur aufgereiht sind, zum Zählen und Ausführen kleiner Rechenoperationen. (Steine, Muscheln, Kugeln, Münzen, Knöpfe.) In neuester Zeit werden solche Rechengegenstände zum Gebrauch beim elementaren Rechenunterricht empfohlen. (Rechnen mit Stäbchen, Knöpfen. Aufkleben von gummierten farbigen Papierblättchen.)

Die Römer bedienten sich einer Rechenmaschine, des *Abakus*. Es ist ein Brett mit 8 Rillen zur Aufnahme der Zählsteine (*Calculi*). Der Abakus blieb als sog. Rechenbank bis zu Ende des Mittelalters im Gebrauch. Die Russen gebrauchten als Rechenmaschine einen Rahmen mit 11 parallel gespannten Drähten, von denen der 8. und der 11. je 4, die andern je 10 Kugeln trugen. Der Apparat ist zum Rechnen mit Rubeln und Kopeken eingerichtet. Der russischen Rechenmaschine*) ist unser allbekanntester russischer Zählrahmen nachgebildet, ein Rahmen mit 10 wagerecht gespannten Drahtstäben, die je 10 Kugeln tragen. Der Zählrahmen stellt einen Hunderter dar und dient als Veranschaulichungsmittel zum Rechnen innerhalb des 1. Hunderters.

Zur Unterscheidung der Stellenwerte bedient man sich auch der *Zahlsymbole*. Es sind Gegenstände oder Zeichen, die den Zahlenwert in der Anzahl, den Stellenwert in der Form darstellen. Im Unterrichte können sie erst dann verwendet werden, wenn die Schüler genau darüber orientiert sind, was die Zeichen zu bedeuten haben. z. B.:

$$\begin{array}{cccccc}
 \square & \square & \triangle & \triangle & \circ & \circ & \circ & ||| & \dots & = 45637. \\
 \square & \square & \triangle & \triangle & \circ & \circ & \circ & ||| & \dots & \\
 4 & & 5 & & 6 & & & 3 & & 7
 \end{array}$$

*) Sie kam durch den französischen Mathematiker Poncelet (Begründer der projektivischen Geometrie), der als Offizier mit Napoleon nach Russland zog und dort längere Zeit gefangen war, nach Westeuropa.

Als Zahlsymbole können auch Geldstücke dienen, was den Vorteil hat, dass der Wert des einzelnen Stückes der Grösse der Zahl, die es bezeichnen soll, entspricht.

2. **Das Rechnen nach der Regel.** Bis ins 18. Jahrhundert hinein wurde die Rechenkunst nicht in den Schulen, sondern bei den Rechenmeistern gelernt. **Adam Riese** (1489 bis 1559) erscheint als der erste bekannte Rechenlehrmeister mit seiner 1522 in Erfurt erschienenen Schrift: „Rechnung auff der linihen vnd federen in zal, mass vnd Gewicht auf allerley handierung.“ Das Rechnen „auf der Linien“ setzt eine dem Abakus verwandte Rechenbank voraus mit 5 Linien und Rechenpfennigen, die je nach der Stellung einen andern Wert einnehmen. Das Rechnen „mit der Feder“ ist ein Zifferrechnen. Riese bespricht die Grundrechnungsarten, darunter auch das Duplizieren und Medieren, sodann das Bruchrechnen und die Rechnungsarten des bürgerlichen Lebens. Die Rechnungen werden nach dem Schema: „Definition, Regel, Beispiel, Probe“ behandelt. Einen Einblick in die durch die Ziffern dargestellten Zahlen erhält der Schüler nicht. Das Rechnen wurde zu einer mechanischen, daher schweren Arbeit, welche durch Verwendung „kurioser und lustiger Aufgaben“ reizvoller gestaltet werden musste.

Christian Pescheck (1676—1747), der **Adam Riese** des 18. Jahrhunderts, lehrt in den „Allgemeinen Teutschen“ und in den „Italienischen Rechenstunden“ sowie im „Arithmetischen Hauptschlüssel“ das Rechnen, ähnlich wie Riese, nach dem Rezept: Definitio, Elaboratio, Declaratio, Probatio. In dem „A-B-C der Rechenkunst“ und in dem „anfahenden Rechenschüler“ versucht er, dem Rechnen in den niedern Schulen Eingang zu verschaffen. Die Anwendung von Reim-Exempeln im Ton der Fibelverse zeigt den Mechanismus seines Rechnens.

Den Widersinn des Regelrechnens suchten bedeutende Pädagogen durch Reformvorschläge zu beseitigen. **Comenius** verweist in Kap. 28 der *Didactica magna* den Anfang des Rechenunterrichts in die „Mutterschule“ und gründet ihn auf die Anschauung. **Frank**e verlangt in seiner „Verbesserten Methode des Pädagogiums“ (VI. 5.): Der Docens hat dahin zu sehen, dass er den Scholaren nicht allein Regeln und Exempel gebe, obgleich davon der Anfang allemal zu machen; sondern bei den Exempeln auch jederzeit den rechten Grund der Regel zeige, damit sie diese im gemeinen Leben so nötige Wissenschaft mit Verstand begreifen; nicht aber, wie vielfältig zu geschehen pflegt, nur ohne Verstand memorieren.“

Gottl. Busse, am Philanthropin zu Dessau, pflegte die Darstellung der Zahlen durch Punktbilder und verwendet als Zehner, Hunderter und Tausender Tüten, Säckchen und Kästchen. Rochow lässt die Kinder, bevor sie mit den Zahlzeichen bekannt gemacht werden, sichtbare Dinge zählen, so Finger, Knöpfe, Bücher, Striche an der Wandtafel. Bernhard Overberg (1754—1826) schrieb in seiner „Anleitung zum zweckmässigen Schulunterricht“ (1793): „Seid nicht damit zufrieden, dass die Kinder die Manier wissen, wie dieses oder jenes zu machen ist, sondern suchet sie auch so viel als möglich dahin zu bringen, dass sie den Grund davon einsehen. Fanget das Rechnen mit ihnen an, ehe sie noch an der Tafel rechnen können.“ Die Forderung des verständnisvollen Rechnens, die Anwendung der Versinnlichungsmittel und die Pflege des Kopfrechnens führten die Rechenkunst vom Regelrechnen nach und nach zum Denkrechnen über.

3. Das Denkrechnen. Den entschiedensten Schritt vom „Rechnen nach der Regel“ zum „Denkrechnen“ tat Heinr. Pestalozzi. In seinem Tagebuch steht unter dem Datum des 2. Febr. 1774 das Bedauern darüber ausgesprochen, dass er sein 3½jähriges Söhnlein Zahlwörter gelehrt, ohne ihm den Zahlinhalt vermittelt zu haben. „Warum habe ich diese Torheit getan und ihn so wichtige Worte für die Erkenntnis der Wahrheit so voreilig nennen gelehrt, ohne Sorgfalt, ihre Begriffe zugleich zu bestimmen, da ich die erste Zahl ihm nannte?... Wie sehr bin ich vom Wege der Natur bei diesem Voreilen abgewichen.“ In „Lienhard und Gertrud“ zeigt Pestalozzi, wie die Kinder bei ihrer Arbeit das Einmaleins lernen können. Es wird durch Bildung von Reihen aus der Addition abgeleitet, eingeübt und in die Division übergeführt. So werden die Operationen miteinander verknüpft, eine durch die andere begründet. In der nämlichen Schrift redet Pestalozzi über den praktischen und erziehlichen Wert des Rechnens. Arnens Gesetzgebung gibt Anlass und Stoff zum praktischen Rechnen. Den erziehlichen Wert des Rechnens sieht Pestalozzi darin, dass „der Mensch in seinen menschlichen Verhältnissen, die Wohlfahrt des Individuums und diejenige der sozialen Gemeinschaft gefördert“ wird durch den Rechenunterricht.

Pestalozzis Elementarmethode. Schon in Stans und hernach in der Lehrgottenschule zu Burgdorf hatte Pestalozzi Gelegenheit, seine Idee betreffend den ersten Rechenunterricht praktisch durchzuführen. Zur Auffassung der Zahlen wurden Buchstabentäfelchen verwendet, gezählt, vermehrt, vermindert. Es war

also ein Rechnen mit Gegenständen. Mit seinem Mitarbeiter Krüsi kam Pestalozzi überein, „dass die Anfänge des Rechnens mit den Kindern durch reale Gegenstände oder wenigstens durch sie repräsentierende Punkte zu betreiben“ sei. Eine theoretische Darlegung seiner elementaren Rechenmethode bietet Pestalozzi in seinen Schriften: „Wie Gertrud ihre Kinder lehrt“ und „Anschauungslehre der Zahlverhältnisse“. Zur Bildung der Zahlbegriffe werden verschiedene Gegenstände in gleicher Anzahl angeschaut und benannt. „Durch das fortdauernde Bleiben des einen (der Anzahl) und das fortdauernde Abwechseln des andern (der Materie) sondert sich im Geist des Kindes der Abstraktionsbegriff der Zahl“. Zur Zahlbezeichnung verwendete Pestalozzi zuerst das Wort. Der Gebrauch der Ziffer trat später auf.

Pestalozzis Tabellen. Bei grösseren Zahlen wird die Verwendung wirklicher Gegenstände umständlich, zudem ist eine grössere Anzahl Gegenstände nur in übersichtlicher Ordnung fassbar. Pestalozzi schuf Tabellen, dienlich zur Zahlveranschaulichung wie zur Beziehung zweier Zahlen aufeinander. Die Zahlen werden durch senkrechte Striche, entsprechend dem Zahlinhalt, dargestellt.

Die **Einheitentabelle** umfasst 100 Rechtecke in 10 Horizontal- und 10 Vertikalreihen. Erstere enthalten je die nämliche Zahl, letztere zeigen die 10 Grundzahlen in der richtigen Reihenfolge.

					...

⋮

Aufsteigend von einfachen Zahlurteilen werden durch Vergleichen zweier Zahlen immer schwierigere, verwickeltere Übungen vorgenommen, die schliesslich in einen Formalismus ausarteten.

$$4 = 2 \times \frac{2}{3} \text{ von } 3.$$

Die Bruchtabellen sind Quadrate zu 100 Feldern mit folgender Einteilung:

1. Tabelle. Die 10 Felder der ersten Horizontalreihe sind ungeteilt, die der zweiten Reihe sind durch senkrechte Linien halbiert, die der dritten Reihe in 3 Teile geteilt u. s. f., bis zur Neunteilung der Felder der 10. Reihe.

2. Tabelle. Neben der Teilung wie bei Tabelle 1 findet sich noch eine wagrechte Teilung der Felder, in der 2. senkrechten Reihe in 2, der 3. in 3, der 4. in 4 Teile u. s. f.

Über die Verwendung der Bruchtablette möge folgendes Beispiel Auskunft geben. (S. 2. Reihe, 3. Quadrat, Tab. 2).

$$\frac{1}{6} = \text{der 3. Teil von } \frac{1}{2}.$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ usw.}$$

Pestalozzi betrieb hauptsächlich das formale Rechnen; seine Rechenübungen erstrebten Kraftbildung. Er fasst das Rechnen nicht als Gedächtnissache, auch nicht als mechanische Arbeit nach Regeln auf. Bei ihm ist das Rechnen Anschauungs- und Denkübung. Er ist der eigentliche Begründer des Denkrechnens. Seine Gegner warfen ihm zwar die einseitige Betonung der formalen Seite des Rechnens vor.

Pestalozzi's Jünger verbreiteten des Meisters Rechenmethode, entkleideten sie ihres Formalismus und sorgten damit für weiteren Ausbau der Rechenmethodik „nach Pestalozzischen Grundsätzen“. Tillich schuf 1806 ein „Allg. Lehrbuch der Arithmetik“, beschränkte das Rechnen mit Gegenständen auf den 1. Zehner und erfand den nach ihm benannten Rechenkasten. Kawerau führt in seinem „Leitfaden für den Unterricht im Rechnen“ (1818) reines und angewandtes Rechnen gesondert vor, verlangt sprachrichtige Antworten und sorgfältige Durchführung der Lösungen und

sucht die Sicherheit im Rechnen durch Gesetz und Regel zu stützen. „Der Schüler muss sich aus dem, was er angeschaut und erkannt hat, selbst das Gesetz, sowie aus dem, was er getan hat, die Regel bilden.“ „Jeder Lehrer also, welcher wahrhaft bilden, nicht abrichten will, hüte sich, im Rechnen die Regel zu geben; er stelle vielmehr die Aufgaben so, dass aus ihnen die Regel von selbst hervorspringen muss.“

Die neueren Rechen-Methodiker. Das Gute an Pestalozzis Rechenmethode, Zahlveranschaulichung und denkendes Rechnen, wird rückhaltlos anerkannt. Das Verwerfliche an des Meisters Praxis, der übertriebene Formalismus, wird ersetzt durch ein auf das Praktische gerichtetes angewandtes Rechnen. Der „Leitfaden für den Rechenunterricht“ von Harnisch (1814) stellt als Grundsätze für den Rechenunterricht auf: 1. Kopf- und Tafelrechnen gehören zusammen. 2. Angewandtes und reines Rechnen werden miteinander verbunden. 3. Der alte Rechenweg (Tafelrechnen nach Regeln) wird in Einklang gebracht mit dem Neuen, das die Pestalozzische Schule geliefert. (Einsicht in die Zahlinhalte und denkendes Rechnen.) In seinem „methodischen Handbuch für den Gesamtunterricht im Rechnen“ (1830/31) fordert A. Diesterweg: 1. Es gibt nur ein Rechnen, nicht ein Kopf- und ein Tafelrechnen. Es beruht auf einer verständigen Beurteilung der in einer Aufgabe enthaltenen Sach- und Zahlverhältnisse. 2. Das richtige Rechnen muss abhängig gemacht werden vom richtigen Erkennen und vollkommener mündlicher Darstellung und nicht von der Übereinstimmung mit dem im „Schlüssel“ verzeichneten Resultat. 3. Fertigkeit in der Behandlung der Zahlen ist notwendig ein Augpunkt bei dem Unterricht in der Zahlenlehre; aber man beschränke die Forderung derselben auf das gehörige Mass. 4. Da es nur ein Rechnen, nämlich ein Rechnen mit dem Verstand gibt, so ist alles Rechnen Kopfarbeit, nicht Handarbeit. Diese Grundsätze werden unter das Prinzip geordnet: „Unterrichte so, dass überall die Selbsttätigkeit des Schülers möglichst ausgebildet werde!“

In der neuesten rechenmethodischen Literatur dreht sich die Diskussion hauptsächlich um 2 Punkte, nämlich um die Frage: Wie erlangt der Schüler am besten einen Einblick in die Zahl und in das Wesen der Zahloperation? und um das gegenseitige Verhältnis von reinem und angewandtem Rechnen. Der erste Punkt betrifft das elementare Rechnen. Hier spielt die Methode naturgemäss eine bedeutende Rolle. A. W. Grube tritt in seinem „Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundsätzen einer

heuristischen Methode“ (1842) für die monographische Behandlung der Zahl ein. Die Zahl wird bildlich oder gegenständlich dargestellt. Auf Grund der Darstellung werden Zerlegungen, Übungen im Aufbauen, Abbrechen, Teilungen und Messungen vorgenommen bis zur vollständigen Erschöpfung aller innerhalb der behandelten Zahl möglichen Operationen. Zahl-Anschauung und allseitige Behandlung einer Zahl sind die charakteristischen Eigenschaften der Grubeschen Methode. (Monographische Zahlbehandlung.)

Entgegen der Anschauungsmethode, den Gebrauch von Zahlbildern, Kugelapparaten u. dgl. verfechten Knilling, Knoche u. a. die Zählmethode. Der Anschauungsmethode wird vorgeworfen, dass sie den Schüler nicht zu Zahlvorstellungen kommen lasse, ihn an den Anschauungsapparat fesse, bis er die Rechenresultate auswendig wisse. Die Anschauungsmethode wird verglichen mit dem Buchstabieren im ersten Leseunterricht, das sich als ein mühseliger Umweg erwiesen hat. Der Zählmethode wird die Kraft zugesprochen, die Schüler „zu rein vorstellendem, rein denkendem Rechnen zu befähigen.“ E. Wilk tritt mit seiner „Neuen Rechenmethode, gegründet auf das natürliche Werden der Zahlen und des Rechnens“ (1911) den „Anschauern“ und den „Zählern“ entgegen, wirft den erstern *K ü n s t l e i e n*, den andern *U m s t ä n d l i c h k e i t e n* vor und weist als natürlichen Weg zur Zahlbildung das Aufbauen der Zahlen zu Fünfer- und Zehnergruppen. Der Zahlbegriff wird nicht auf empirischem Wege gebildet; die Zahl ist ein Produkt des Denkens, 48 kann man nicht durch *A n s c h a u e n* erfassen, nur mühsam *z ä h l e n d a u f b a u e n*, aber durch Auflösen in 4 Zehner, 1 Fünfer und 3 Einer sofort in ihrem Wesen erkennen.

Bedeutungsvoll für das Verhältnis zwischen dem reinen und dem angewandten Rechnen ist „der Rechenunterricht von B. Hartmann“ (1888), des Vertreters der Herbart-Zillerschen Schule auf dem Gebiet des Rechenunterrichts. Er stellt das Sachrechnen in den Vordergrund und behandelt die Aufgabe nach den fünf formalen Stufen. Zahlauffassung und Einführung in die Operationsarbeit bilden den Hauptteil der Behandlung, die endlich ausmündet in der Abstraktion der Rechenregeln und deren Anwendung im Rechnen. Die Anknüpfung an einen konkreten Rechenfall weckt das Interesse der Schüler. Die Lösung weist energisch auf die Notwendigkeit der Zahlauffassung und der Fertigkeit im Operieren hin. Es ist aber nicht zu vergessen, dass im Rechenunterricht *d a s R e c h n e n* die Hauptsache ist und nicht die Erörterung von Sachverhältnissen.

Das Sachrechnen ist das Ziel; aber Zahlauffassung und Fertigkeit im Operieren bilden die Vorbedingung, das Ziel zu erreichen. Wie das Rechnen auf bestimmte Gebiete des Wissens (Volkswirtschaft) angewendet werden kann, zeigt K. Teupser im „Wegweiser zur Bildung heimatkundlicher Rechenaufgaben“ (1907).

IV. Auswahl und Anordnung des Lehrstoffes. Lehrplan.

Die Stoffgebiete des Rechenunterrichts: Zahlen und Zahlssystem, Operationen, Angewandtes Rechnen, können in Anbetracht der geistigen Entwicklung der Schüler nur zum Teil und unter Beschränkung auf das Notwendigste durchgegangen werden. Auswahl und Anordnung des Lehrstoffes müssen so getroffen werden, dass die Behandlung einer Materie den Schüler zur Bearbeitung einer folgenden Materie tüchtig macht.

Die Auswahl. Der Schüler muss bekannt werden mit:
1. Den Grundzahlen; 2. der Zahlenreihe bis in die Tausender;
3. den gemeinen Brüchen mit kleinem Nenner (Grundzahl, leicht teilbare Zahl innerhalb 100); 4. den Dezimalbrüchen, mindestens bis auf 3 Dezimalstellen; 5. dem Münz-, Mass-, und Gewichtssystem; 6. dem Zehnersystem, den Stellenwerten und der Arbeit des Resolvierens und Reduzierens.

Er muss vollkommen Sicherheit erhalten im Operieren mit
1. Grundzahlen; 2. den Zahlen innerhalb 100, dem Überschreiten der Zehner, dem Einmaleins und Einsineins; 3. den Zahlen des 1. Tausenders, dem Überschreiten der Hunderter, dem Zehner-Einmaleins und -Einsineins; 4. beliebigen ganzen Zahlen in schriftlicher Ausführung; 5. gemeinen und dezimalen Brüchen; 6. benannten Zahlen und der Verwandlung der Sorten.

Bezüglich des angewandten Rechnens muss der Schüler verfügen über: 1. die Anwendung des Zweisatz und des Dreisatz; 2. die Begriffe: Preis, Prozent, Zins, Gewinn, Verlust, Abzug; 3. die Fähigkeit, geometrische Formen zu berechnen; 4. einige Einsicht in hauswirtschaftliche Verhältnisse, in Handel und Verkehr.

Die Darlegung neuer Sachverhältnisse bereichern das Wissen der Schüler; der Sachunterricht seinerseits bietet oft Gelegenheit zu rechnerischen Arbeiten.

Die Anordnung (Lehrgang). Die Forderung des lückenlosen Fortschreitens im Unterricht passt am allermeisten für den

Rechenunterricht, da ein sprunghaftes Vorgehen sich nirgends so empfindlich rächt wie hier. Die Stoffanordnung muss sich so gestalten, dass der Schüler niemals an unübersteigliche Hindernisse gestellt wird, sondern kraft der gewonnenen Erkenntnis in der Behandlung eines Stoffes fähig ist, das Neue mit Erfolg zu bearbeiten. Die Forderung des lückenlosen Fortschreitens weist folgende Wege:

Der Zahlauffassung: 1. Sicheres Auffassen der Grundzahlen und des Zehners; 2. sukzessives Erweitern des Zahlenraumes; 3. Erweitern des Zahlenraumes von 1 abwärts zu den Bruchteilen und speziell durch dezimale Teilung zu den Dezimalbrüchen.

Dem Operieren. 1. Operieren mit Grundzahlen:

$$1 + 1 \quad 1 - 1 \quad 1 \times 1 \quad 1 : 1 \quad 1/1$$

2. Operieren mit mehrstelligen Zahlen nach Massgabe der Erweiterung des Zahlengebietes; 3. Operieren mit gemeinen und dezimalen Brüchen.

Dem Berechnen. 1. Rechnen mit Sachverhältnissen, die dem Kinde aus dem häuslichen Leben bekannt sein können; 2. Angewandtes Rechnen mit vorher zu erörternden Sachverhältnissen (Zins, Steuer, Skonto); 3. Anwendung des Rechnens auf spezielle Unterrichtsgebiete (Geographie, Volkswirtschaft, geometr. Rechnen, Buchhaltung).

Durch alle Stufen hindurch gehen Zahlauffassung, Operieren und Berechnen nebeneinander her. Der Lehrgang bewegt sich also in konzentrischen Kreisen.

Der Lehrplan.

Amtliche Vorschriften und obligatorische Lehrmittel (Rechenbücher) heben in der Regel über die Notwendigkeit der Stoffauswahl und -Anordnung hinweg. Zur Regulierung eines ruhigen aber zielbewussten Unterrichtsganges wird der Lehrer auf Grund seines Lehrmittels Jahresprogramme für die einzelnen Klassen aufstellen. Als Grundriss eines Lehrplanes für den gesamten Rechenunterricht in der Volksschule seien hier die Jahrespensen umschrieben:

I. Der erste Zehner.

1. Auffassen und Darstellen 1—5.
2. Vergleichen der Zahlen innerhalb 5.
3. Zu- und Abzählen innerhalb 5.
4. Auffassen und Darstellen 6—10.
5. \pm innerhalb 10.

6. Ergänzen auf 10 und Abbrechen von 10.
7. Einer, Zweier, Fünfer, Zehner.
8. Angewandtes Rechnen aus den Gebieten des Anschauungs-
Unterrichts (Haus und Schule).

II. Der erste Hunderter.

1. Der zweite Zehner. \pm Grundzahlen mit Überschreiten der 10.
2. Die Zehnerzahlen. Operieren mit denselben.
3. Zehner und Einer. Numerieren innerhalb 100.
4. \pm Grundzahlen in parallelen Reihen, innerhalb der Zehner
und mit Überschreiten derselben. 6, 16, 26.... 86 \pm 7.
5. Fortl. \pm Grundzahlen. Bilden der Einmaleinsreihen durch
Zu- und Abzählen.
6. Vervielfachen und Teilen.
7. Malnehmen und Messen.
8. Operieren mit zweistelligen Zahlen.
9. Fr. Rp., m cm, q kg.

III. Der erste Tausender.

1. Der zweite Hunderter. \pm Zehner und aus Zehnern und Einern
bestehenden Zahlen über 100 hinaus.
2. Einmaleins, Teilen und Messen mit 11, 12..... 20.
3. Die Hunderterzahlen.
4. Die dreistellige Zahl. Positionswerte. 536 \pm 200, 70, 9, 360,
405, 378.
5. Das Einmaleins der Zehnerzahlen, Teilen und Messen der
Produkte.
6. Operieren mit dreistelligen Zahlen innerhalb 1000.
7. km, m ; kg, g ; m, mm.

IV. Die erste Million.

1. Der zweite Tausender. \pm Hunderter, Zehner und Einer
über 1000.
2. Aufbauen der Zehntausender und Hunderttausender.
3. Operieren mit Tausendern.
4. Einmaleins der Zehner: 70 · 80; 3200 : 40 — und der Hun-
darter: 7 · 800; 3200 : 4.
5. Der zweistellige Multiplikator und der zweistellige Divisor.
6. Anwendung des Zweisatzes.

V. Das metrische System.

1. Die 10teiligen Masse, der Zehntel.
2. Die 100teiligen Masse, der Hundertstel.

3. Die 1000teiligen Masse, der Tausendstel.
4. Operieren mit benannten Zahlen; bei den multiplikativen Operationen Verwenden des Zweisatzes.
5. Angewandtes Rechnen aus dem Gebiet von Handel und Gewerbe.
6. Fertiges Operieren mit beliebigen ganzen Zahlen.

VI. Bruchrechnen.

1. Auffassen der gem. Brüche.
2. Wertvergleichung, Verwandeln der Brüche.
3. \pm gleichnamiger Brüche, Multiplizieren und Teilen des Bruches. Messen gleichnamiger Brüche.
4. Die Dezimalbrüche. Schriftl. Operieren mit denselben.
5. Angewandtes Rechnen aus Handel und Gewerbe. Der Dreisatz.

VII. Beendigung des formalen Rechnens.

1. Das Zehnersystem.
2. Operieren mit beliebigen Brüchen.

VIII. Das bürgerliche Rechnen.

1. Prozent-Rechnung.
2. Zinsrechnung, Skonto.
3. Berechnungen aus Handel und Gewerbe, Landwirtschaft, Volkswirtschaftliches Rechnen.

Die acht Abschnitte werden ungefähr den Schuljahren entsprechen; doch mögen lokale Verhältnisse Abweichungen verlangen. Innerhalb der einzelnen Abschnitte ist der Stoff nur angedeutet. Zahlenrechnen (Kopfrechnen) und Zifferrechnen sind nicht unterschieden, da beide Rechenarten in jeder Stoffbehandlung, in jeder Rechenlektion vorkommen.

Vorstehender Lehrplan enthält ein Stoff-Minimum, für besonders beanlagte Rechner ist ein fernerer Übungsstoff bereit zu halten, damit jeder Gelegenheit hat, seinen Kräften entsprechend zu arbeiten.

V. Unterrichtsmethode und Hilfsmittel des Rechenunterrichts.

Der Rechenunterricht erstreckt sich über einen Zeitraum von 8—9 Jahren. In dieser Zeit weitet sich der Gesichtskreis des Schülers; damit wächst auch die Kraft der Auffassung, und in normalen Verhältnissen steigert sich auch der Wille zu grösserer Kraftleistung und die Möglichkeit selbständigen Schaffens. Der Rechenunterricht

muss sich aber der individuellen Geistesverfassung der Schüler wie dem zu behandelnden Stoffe anpassen. Eine Darlegung der Methode bezüglich des gesamten Rechenunterrichts kann sich daher nur auf die Festsetzung allgemeiner Grundsätze einlassen. Eine spezielle methodische Anleitung muss notwendigerweise die einzelnen Altersstufen der Schüler und die entsprechenden Stoffgruppen des Lehrplanes auseinanderhalten und durch typische Lehrbeispiele illustriert werden.

Das Ziel des Rechenunterrichts, sichere Erledigung vorgelegter Rechenfälle, setzt beim Schüler das Vorhandensein einer geistigen Kraft voraus, die aus der Natur des Problems sofort den Weg zur Lösung erkennt und im fertigen Operieren den Weg gehen kann. Diese Kraft erwächst aus der fortgesetzten freudigen Beschäftigung mit den Zahlen und ihren Beziehungen zueinander. Ohne die innere Teilnahme des Schülers an der Rechenarbeit ist keine Kraftbildung möglich. Die Freudigkeit am Rechnen beim Schüler zu wecken, rege zu halten und immerfort zu steigern, muss das erste Bestreben des Rechenlehrers sein. Er muss für „schöne Rechenstunden“ sorgen. Zu diesem Zwecke ist die Rechenarbeit der geistigen Kraft des Schülers anzupassen. Zu grosse Zumutungen schrecken ab; andauernd gleichartige Übungen ermüden; zu leichte Arbeiten langweilen. Anpassung an die geistige Kraft des Schülers ist die erste Anforderung an den Rechenunterricht.

Damit der Schüler freudig mitarbeite, ist notwendig, dass er absolut klare Einsicht in die zu verwendenden Zahlen habe. Der Unterricht muss daher vor allem aus für die richtige Zahlauffassung sorgen. Ohne den klaren Einblick in die Zahlen ist ein bewusstes Operieren unmöglich; höchstens wird ein mechanisches Nachahmen vorgemachter Tätigkeiten erreicht, das den Schüler unbefriedigt lässt, zur Unselbständigkeit erzieht und niemals dem Ziel des Rechenunterrichts entgegenführt. Zur Erzielung einer klaren Zahlauffassung bedient sich der Rechenunterricht geeigneter Hilfsmittel zur Ermöglichung der Anschauung. Je einfacher und handlicher das Veranschauligungsmittel ist, desto besser entspricht es seiner Bestimmung. Die Notwendigkeit der Veranschaulichung bezieht sich auch auf die Vorgänge des Operierens, so lange sie sich in kleinen Zahlen bewegen.

Das auf dem Wege der Anschauung erfasste Operationsgeschäft muss geübt werden, bis sich eine Rechenfertigkeit bildet.

Übung macht den Meister. Soll die Übung den Schüler interessieren, muss sie in wechselnder Gestalt durchgeführt werden. Eine und dieselbe Art der Übung darf nicht lange dauern. Den verschiedenen Graden der Intelligenz ist durch die Wahl der Operationszahlen Rechnung zu tragen. Mündliches und schriftliches Rechnen wechseln in jeder Rechenlektion miteinander ab. In mehrklassigen Schulen werden benachbarte Abteilungen zu gemeinschaftlichem Kopfrechnen zusammengezogen, z. B.

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
7	×	8	18	80	818

Die ganze Klasse soll sich als Arbeitsgemeinschaft fühlen, wobei jedes einzelne Glied seinen Beitrag leistet an der Lösung der allen zukommenden Aufgabe. Um jedem Schüler die Teilnahme zu erleichtern, kann öfters die Wahl der Aufgaben freigestellt werden. Handelt es sich beispielsweise um das Teilen mit 6 innerhalb 100, darf jeder Schüler nach gemeinschaftlicher Lösung einiger Aufgaben selber eine Sechserzahl wählen und das Teilungsgeschäft vollziehen. Durch Abwechslung in den Übungen wird das Interesse des Schülers rege erhalten.

Innerhalb derselben Übung ist ein Fortschreiten vom Leichterem zum Schwereren zu beobachten. Die erste Aufgabe knüpft an Bekanntes an. Jede folgende bringt nur so weit Neues, Schwierigeres, als es dem Schüler möglich ist, die neue Schwierigkeit zu bewältigen. Und wie ihm dies gelingt, gewinnt er auch Vertrauen in die eigene Kraft. Es sei z. B. gefunden worden, dass $\frac{1}{100} = 1\%$ sei. Nun die Aufgaben:

	1%	4%	$\frac{1}{2}\%$	$3\frac{1}{2}\%$
100	1	4	$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$
700	7	28	$3\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2}$
4000	40	160	20	140
50	0,50	2	0,25	1,75
640	6,40	25,60	3,20	22,40
1280	12,80	51,20	6,40	44,80

Die stetige Steigerung in den Anforderungen innerhalb einer Rechenstunde wie von einer Stunde zur andern sichert dem Schüler jederzeit neue Arbeit, aber solche, die er bewältigen kann, da jede gewonnene Position als Sprungbrett dient zur Gewinnung einer neuen Position. Weil er nirgends auf unüberwindliche Hindernisse stösst, wächst ihm mit dem Vertrauen in die eigene Kraft auch der Mut, sich an neue Aufgaben heranzuwagen.

Die Rechenfertigkeit wird erheblich erhöht, wenn sich der Schüler auf allgemeine Regeln stützen kann. Aber das Gesetz muss er selber gefunden haben. Zu dem Zwecke werden mehrere Aufgaben allen Schülern sichtbar angeschrieben, damit das Gleichartige dem Auge sichtbar werde. Wenn z. B. durch Veranschaulichung klar erfasst worden ist, dass die Hälfte von $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, von $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$... der dritte Teil von $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, von $\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$... ist, wird der Schüler ohne Schwierigkeit folgende Tabelle ausfüllen können:

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{16}$	
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{24}$	
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{32}$	usw.

Der Überblick über die Tabelle lässt den Schüler erkennen, dass die Division eines Bruches sich (bei unteilbarem Zähler) in der Multiplikation des Nenners vollzieht.

Die Regel braucht, namentlich bei jüngeren Schülern, nicht einmal in Worte gefasst zu werden. Es genügt die Wahrnehmung des Gesetzmässigen, z. B.: $8 + 6 = 14$

$$18 + 6 = 24$$

$$28 + 6 = 34 \text{ usw. oder bei der 19er-Einmaleins-Reihe:}$$

$$19 \quad 38 \quad 57 \quad 76 \quad 95 \quad 114 \quad 133 \quad 152 \quad 171 \quad 190$$

Die Einer nehmen ab wie im 9er 1×1 . Die Zehner bewegen sich in der Reihe der ungeraden Zahlen. Damit die Übungen frei von jedem Mechanismus vom Schüler bewusst ausgeführt werden, geht die Behandlung einer methodischen Einheit den induktiven Weg:

Darlegung eines neuen Gebietes auf Grund einer dem praktischen Leben entnommenen Aufgabe;

Auffassen einer Zahl oder eines Zahlengebietes, $(7, n/7)$;

Erfassen einer neuen Operation $(47 \times 65 = (40 + 7) \times 65)$;

Erkennen eines neuen sachlichen Verhältnisses ($\%$, Verlust);

Lesen und Schreiben der neuen Zahlen;

Operieren, mündlich und schriftlich;

Anwenden im praktischen Rechnen.

Zur Ableitung einer Rechenregel muss der Weg eingeschlagen werden, auf dem der Schüler das Gesetz selber finden und bewusst anwenden kann, z. B.: $10 \times 7 = 70$

$$40 = 400$$

$$64 = 640$$

Es ist mit 10 multipliziert worden. Dabei sind
 die Einer zu Zehnern
 die Zehner zu Hundertern

geworden. Daher das Gesetz: Wird eine Zahl mit 10 multipliziert, so werden ihre Einer zu Zehnern usw. oder kurz: Mit 10 wird multipliziert, indem man der zu multiplizierenden Zahl eine Null anhängt. Eine Reihe mündlicher und schriftlicher Rechnungen lässt nun das gewonnene Gesetz eindrucklich werden.

So bewegt sich der Rechenunterricht in den drei Tätigkeiten: **A n s c h a u e n**, **D e n k e n**, **A n w e n d e n**. Diesen Weg zu gehen stellt Anforderungen an den Lehrer, dass er der Anschauung Rechnung trage und dafür Sorge, dass das denkende Rechnen der Schüler in korrektem sprachlichen Ausdruck und in klarer schriftlicher Darstellung offenbar werde. Dem Schüler sichert die Sorgfalt des Lehrers ein fröhliches Arbeiten — das zum erfreulichen Ziele führt.

* * *

Q u e l l e n :

- Egger, Meth.-praktisches Rechenbuch.
 H. Haase, Zur Methodik des ersten Rechenunterrichts.
 „ Die entscheidende Frage im ersten Rech.-Unt.
 Hartmann, Der Rechenunterricht in der Volksschule.
 H. Knoche, Rechenunterricht und Denkprinzip.
 R. Rude, Methodik. II. Bd.
 Rüefli, Pestalozzis Rechenmethodische Grundsätze.
 Teupser, Zur Bildung heimatkundl. Rechen-Aufg.
 H. Walsemann, Methodik, 1. Heft.
 E. Wilk, Neue Rechenmethode, gegründet auf das natürliche Werden der Zahl.
 Zeissig, Theoret. Volksschulmethodik.
 Zeissig & Fritzsche, Prakt. Volksschulmethodik.
 *
- Gerlach, Schöne Rechenstunden.
 S. E. Gubler, Mdl. Rechnen.
 Hartmann & Ruhsam, Rechenbuch für deutsche Stadt und Landschaft.
 Hentschel & Jänike, Rechenbuch für die abschl. Volkssch.
 A. Krebs, Lehrbuch des angewandten Rechnens.
 Rüefli, Aufgaben z. schr. Rechn.
 J. Stöcklin, Bernisches Kopfrechenbuch.
 „ Rechenbuch für die Gemeindeschulen des Kts. Aargau.
 E. Wilk, Das Rechnen der Volksschule.
-