

Eiförmige Drehkörper

Autor(en): **Bützberger, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische pädagogische Zeitschrift**

Band (Jahr): **27 (1917)**

Heft 4-5

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-789044>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

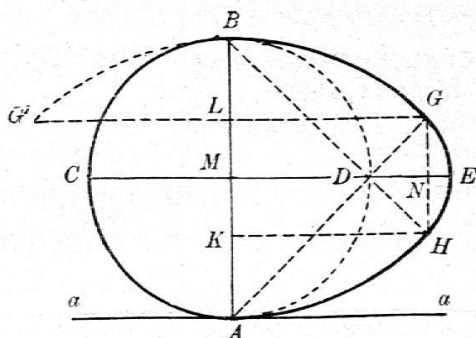
EIFÖRMIGE DREHKÖRPER. VON DR. F. BÜTZBERGER, PROFESSOR AN DER KANTONSSCHULE ZÜRICH.

In manchem Schulprogramm werden einzelne Kapitel aus der mathematischen Geographie und aus der Physik, z. B. die Bestimmung von Trägheitsmomenten und Schwerpunkten, die Guldinsche Regel usw., sowohl im mathematischen, als auch im physikalischen Lehrstoff verzeichnet. Eine erfolgreiche Behandlung dieser Kapitel ist leicht, wenn der Unterricht in den genannten Fächern vom gleichen Lehrer erteilt wird. Andernfalls vermisst oft das eine Fach die nötigen Vorkenntnisse aus dem andern und da beide Fächer ohnehin zu viel Werg an der Kunkel haben, so geschieht es oft, dass diese gemeinsamen Kapitel vom Vertreter des einen Faches dem andern überlassen werden und umgekehrt, was um so mehr zu bedauern ist, da sie zu den schönsten und nützlichsten Anwendungen der Mathematik gehören.

Von den mir bekannten elementaren Lehrbüchern der Stereometrie behandelt keines den „Schwerpunkt und die Rotationsgebilde“ so gründlich, wie A. Emmerich, „Leitfaden und Übungsbuch der Stereometrie“. Wer sich die Mühe nimmt, die zahlreichen schönen Aufgaben dieses Kapitels mit der Guldinschen Regel zu lösen, gelangt zu einer gründlichen Beherrschung derselben.

Es sei mir gestattet, diesen Aufgaben hier noch einige hinzuzufügen, zu deren Lösung mich vor Kurzem einer meiner Schüler, ein eifriger Ornithologe, angeregt hat.

Bekannt ist die aus beistehender Figur ersichtliche Konstruktion der sog. Eilinie, die aus dem Halbkreis ACB vom



Radius r , aus den beiden Kreisbogen AH und BG vom Radius $2r$ und endlich aus dem Kreisbogen GEH vom Radius $2r - r\sqrt{2}$ besteht. Es ist eine leichte Schüleraufgabe, den Umfang u und den Inhalt J der Eifläche zu bestimmen; man erhält:

$$u = r \frac{\pi}{2} (6 - \sqrt{2}) = r \cdot 7,203336\dots$$

$$J = r^2 \{ (3 - \sqrt{2}) \pi - 1 \} = r^2 \cdot 3,981895\dots$$

Etwas schwieriger ist die Bestimmung der Oberfläche F und des Volumens V des Körpers, der entsteht, wenn man die Eilinie um die Achse CE ringsum dreht. Bezeichnet man mit F_1 die Fläche und mit V_1 das Volumen der Halbkugel ACB , so ist

$$F_1 = 2 \pi r^2 \quad \text{und} \quad V_1 = \frac{2 \pi}{3} r^3.$$

Das Rechteck $GHLK$ beschreibt bei der Drehung um CE einen geraden Kreiszyylinder vom Radius

$$NG = r(2 - \sqrt{2}) : \sqrt{2} = r(\sqrt{2} - 1)$$

und von der Höhe $MN = r + r(\sqrt{2} - 1) = r\sqrt{2}$; sein Volumen ist daher

$$V_2 = \pi r \sqrt{2} \cdot r^2 (3 - 2\sqrt{2}) = \pi r^3 (3\sqrt{2} - 4).$$

Wir bezeichnen ferner den Inhalt der vom Bogen GEH beschriebenen Drehfläche mit F_3 und das Volumen des vom Segment GEH beschriebenen Drehkörpers mit V_3 . Da

$$NE = r(2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1) = r(3 - 2\sqrt{2}),$$

so ergibt sich leicht

$$F_3 = 2 \pi r^2 (2 - \sqrt{2}) (3 - 2\sqrt{2}) = r^2 \cdot 2 \pi (10 - 7\sqrt{2})$$

und

$$V_3 = \frac{\pi}{3} r^3 (3 - 2\sqrt{2})^2 (3 - \sqrt{2}) = r^3 \cdot \frac{\pi}{3} (75 - 53\sqrt{2}).$$

Endlich ist noch der Inhalt F_4 der vom Bogen BG bei der Drehung um CE beschriebenen Drehfläche und das Volumen V_4 des vom halben Kreissegment BGL beschriebenen Drehkörpers zu berechnen. Zu dem Zweck lasse man zunächst den Bogen $BGL = \pi r$ sich um die Tangente a des Grundkreises im Punkte A ringsum drehen. Er beschreibt eine Kugelzone vom Inhalt

$$2 \pi \cdot 2r \cdot 2r\sqrt{2} = r^2 \cdot 8 \pi \sqrt{2}.$$

Bedeutet also x den Abstand des Schwerpunktes dieses Bogens von der Drehachse a , so folgt x mittelst der Regel von Guldin aus der Gleichung

$$2 \pi x \cdot \pi r = r^2 \cdot 8 \pi \sqrt{2},$$

$$x = r \frac{4\sqrt{2}}{\pi}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes von der Achse CE ist $x - r = \frac{r}{\pi}(4\sqrt{2} - \pi)$. Dreht man jetzt den Bogen GBG' um die Achse CE , so erhält man mittelst der Regel von Guldin

$$2F_4 = \pi r \cdot 2\pi \frac{r}{\pi}(4\sqrt{2} - \pi),$$

$$F_4 = r^2 \cdot \pi(4\sqrt{2} - \pi).$$

Der Flächeninhalt des Kreissegmentes GBG' ist $r^2(\pi - 2)$. Dreht man dieses Segment um die Achse a ringsum, so beschreibt es eine Kugelrinde vom Volumen

$$\frac{\pi}{6}s^2h = \frac{\pi}{6} \cdot r^3 16\sqrt{2} = r^3 \cdot \frac{8\pi\sqrt{2}}{3};$$

denn es ist $s = h = GG' = r \cdot 2\sqrt{2}$. Ist nun y der Abstand des Schwerpunktes des Kreissegmentes GBG' von der Achse a , so erhält man mittelst der Regel von Guldin die Gleichung

$$r^2(\pi - 2) \cdot 2\pi y = r^3 \cdot \frac{8\pi\sqrt{2}}{3},$$

woraus folgt

$$y = r \frac{4\sqrt{2}}{3(\pi - 2)}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes von der Achse CE ist

$$y - r = \frac{r}{3(\pi - 2)}(4\sqrt{2} + 6 - 3\pi).$$

Aus der Regel von Guldin folgt endlich:

$$2V_4 = r^2(\pi - 2) \cdot 2\pi \frac{r}{3(\pi - 2)}(4\sqrt{2} + 6 - 3\pi)$$

oder

$$V_4 = r^3 \cdot \frac{\pi}{3}(6 + 4\sqrt{2} - 3\pi).$$

Es ist daher die Oberfläche des Eies

$$F = F_1 + F_3 + F_4 = r^2\pi(22 - 10\sqrt{2} - \pi)$$

$$F = r^2 \cdot 14,8166\dots$$

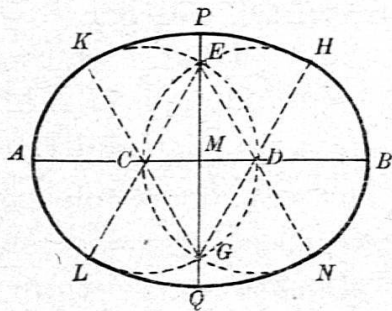
und das Volumen desselben

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = r^3 \cdot \frac{\pi}{3}(71 - 40\sqrt{2} - 3\pi)$$

$$V = r^3 \cdot 5,2429811\dots$$

Der Schüler kann nun in gleicher Weise die ihm aus dem geometrischen Zeichnen bekannten Ovale behandeln. Ein solches

Oval hat aber zwei Symmetrieachsen. Je nachdem man es um die grosse oder kleine Achse ringsum dreht, entsteht ein verlängerter oder abgeplatteter Drehkörper.



F sei die Oberfläche des ersten, F' diejenige des zweiten, V das Volumen des ersten, und V' dasjenige des zweiten Körpers.

Für das Oval aus Drittelpunkten, in dem $AC = CD = DB = r$ ist, erhält man:

$$u = r \cdot \frac{8\pi}{3} = r \cdot 8,3775804\dots$$

$$J = r^2 \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = r^2 \cdot 5,4171599\dots$$

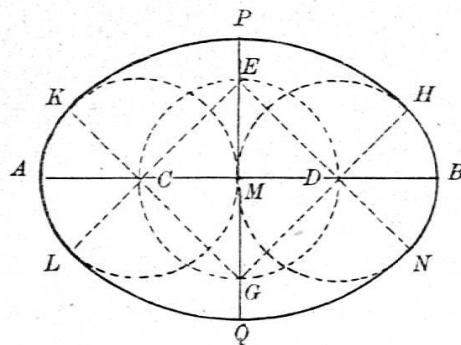
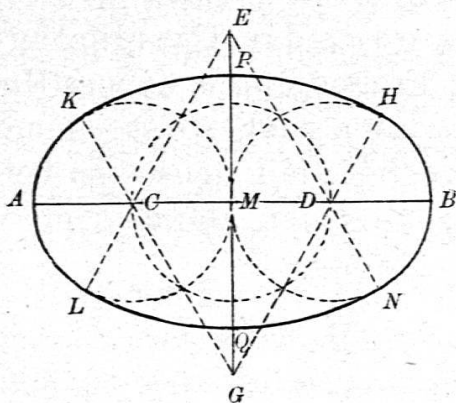
$$F = r^2 \cdot \frac{2\pi}{3} (15 - \pi\sqrt{3}) = r^2 \cdot 20,01949\dots$$

$$V = r^3 \cdot \frac{\pi}{12} (75 - 8\pi\sqrt{3}) = r^3 \cdot 8,238516\dots$$

$$F' = r^2 \cdot \frac{2\pi}{3} (24 + \pi - 9\sqrt{3}) = r^2 \cdot 24,19683\dots$$

$$V' = r^3 \cdot \frac{\pi}{12} \{ 4(32 + \pi) - 57\sqrt{3} \} = r^3 \cdot 10,95354\dots$$

Fügen wir noch die entsprechenden Ergebnisse für die zwei folgenden Ovale aus Viertelpunkten hinzu, in denen $AB = 4r$ ist.



Für das erste Oval findet man:

$$u = r \cdot \frac{10\pi}{3} = r \cdot 10,471975\dots$$

$$J = r^2 \left(\frac{11\pi}{3} - 2\sqrt{3} \right) = r^2 \cdot 8,055071\dots$$

$$F = r^2 \cdot 2\pi (10 - \pi\sqrt{3}) = r^2 \cdot 28,64254\dots$$

$$V = r^3 \cdot \frac{\pi}{3} (62 - 9\pi\sqrt{3}) = r^3 \cdot 13,64227\dots$$

$$F' = r^2 \cdot \frac{4\pi}{3} \{ 3(9 - 4\sqrt{3}) + \pi \} = r^2 \cdot 39,19443\dots$$

$$V' = r^3 \cdot \frac{2\pi}{3} \{ 27(2 - \sqrt{3}) + \pi \} = r^3 \cdot 21,73191\dots$$

und für das zweite Oval:

$$u = r \cdot \pi (2 + \sqrt{2}) = r \cdot 10,72607\dots$$

$$J = r^2 \{ \pi (2 + \sqrt{2}) - 2 \} = r^2 \cdot 8,72607\dots$$

$$F = r^2 \pi \{ 4(3 + \sqrt{2}) - \pi(\sqrt{2} + 1) \} = r^2 \cdot 31,64331\dots$$

$$V = r^3 \frac{\pi}{6} \{ 52 - 9\pi + 6\sqrt{2}(4 - \pi) \} = r^3 \cdot 16,23653\dots$$

$$F' = r^2 \pi \{ 4(\sqrt{2} + 1) + \pi \} = r^2 \cdot 40,207505\dots$$

$$V' = r^3 \cdot \frac{\pi}{6} \{ 4(3 + 4\sqrt{2}) + 3\pi \} = r^3 \cdot 23,06567\dots$$

Man kann auch die sog. Eilinie in verschiedener Weise aus Kreisbogen zusammensetzen, indem man die Geraden AD und BD um gleiche Beträge parallel verschiebt, z. B. bis sie bzw. die Kreisbogen AD und BD berühren. Die natürlichen Eilinien bestehen aber sicherlich nicht aus einzelnen Kreisbogen.

Sind die Vogeleier Drehkörper und was für Kurven sind ihre Meridiane oder die Umrisslinien ihrer Projektionen? Ob diese Fragen durch neuere Untersuchungen endgültig beantwortet worden sind, weiss ich nicht. Jakob Steiner scheint sich schon früh mit denselben befasst zu haben. In einem seiner wiedergefundenen Manuskripte vom Mai 1824 findet sich folgende Betrachtung:

„Mechanische Zeichnung der Eilinie“.

„Es seien P und p zwei Stifte und S sei die zeichnende Feder. An den Stift P binde man den Faden an, führe ihn hinter der Feder S herum nach p , hinter p herum wieder zurück nach S und binde ihn hier an. Bewegt man nun die Feder S so, dass alle Teile des Fadens stets angespannt sind, so beschreibt

sie eine Eilinie. Das stumpfe Ende derselben liegt nach p und das spitze nach P hin.

Wird das Ende des Fadens — anstatt in S angebunden zu werden — noch einmal hinter S herumgeführt zurück nach p und hier angebunden, so entsteht ebenfalls eine Eilinie.

Und überhaupt, sind n und m irgend zwei ungleiche Zahlen, bezeichnet man PS und pS mit a und b und setzt $na + mb = A =$ einer bestimmten Grösse, so ist der geometrische Ort des Punktes S immer eine eiförmige Linie. Ist $n < m$, so kann der Punkt p innerhalb, auf oder ausserhalb der Kurve liegen.

Bei einer Probe, die wir über diese Eilinie anstellten, fanden wir ein Hühnerei, dessen Form genau mit der Kurve übereinstimmte, für welche $n = 1$, $m = 2$ und $A : v = 11 : 7$, wo $v = Pp$. Und noch genauer entsprach die Kurve, für welche $n = 2$, $m = 3$, $A : v = 7 : 2$ der Form eines Puteneies.¹⁾ Die Achse der ersten Kurve war also

$$= \frac{A - v}{3} + A - v = \frac{4}{3}(A - v) = \frac{4}{3}\left(\frac{11}{7} - 1\right)v = \frac{16}{21}v = \frac{16}{33}A.$$

und die der zweiten Kurve

$$= \frac{A - 2v}{5} + v + \frac{A - 3v}{5} = \frac{2A}{5} = \frac{7}{5}v.$$

Es schien, dass für die Form der meisten Hühnereier $n = 1$ und $m = 2$ sei und dass ihre Verschiedenheit bloß dem Verhältnis $A : v$ zukomme.

Um die erwähnte Kurve des Puteneies mechanisch zu zeichnen, verfähre man so:

1. In p binde man den Faden an, führe ihn hinter S herum, hinter P herum, zurück hinter S herum, hinter p herum zurück nach S und binde ihn hier an oder
2. Man binde den Faden in P an, führe ihn von hier nach S, p, P, S, p, S und binde ihn an diesem letzten Punkt fest.“

Dividiert man Steiners allgemeine Definitionsgleichung dieser Kurven durch n , so nimmt sie die Form $a + \lambda b = k$ an, worin λ und k gegebene Konstante und a und b die bipolaren

¹⁾ „Ich setzte das Ei auf die Zeichnung, hielt das Auge in einer Entfernung von ungefähr zwei Fuss gerade darüber und sah dann, wie der Rand des Eies genau die Kurven deckte. Beim Putenei war $v = 2$ Pariserzoll und beim Hühnerei war $A = 4$ Zoll 5 Linien.“

Koordinaten des laufenden Punktes S in bezug auf die festen Pole P und p sind. Diese Eiliniien oder Ovale sind seither oft untersucht worden; ich verweise insbesondere auf die gehaltvolle Abhandlung „Bipolare Koordinaten“ von Hermann Seidler in Czubers vortrefflicher Zeitschrift für das Realschulwesen, Wien 1909, S. 198—217 und 270—278 und auf Gino Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Leipzig, 1902, S. 310 f.

LITERARISCHES.

Göbelbecker, L. F. *Grundriss der Methodik des ersten Unterrichts der kleinen Anfänger.* Auf neuen Bahnen begründet und dargestellt. I. Teil: Grundlegende Heimatkunde, Lesen und Schreiben. Leipzig, Otto Nemnich. 207 S. Fr. 6.80.

Das Buch behandelt in sehr ausführlicher Weise die psychologischen und physiologischen Vorgänge, die für das Lesen- und Schreibenlernen in Betracht kommen. Die verschiedenen Lese- und Schreibmethoden werden einer eingehenden Prüfung unterzogen. Eine kürzere und dafür manchmal etwas sachlichere Fassung würden der ganzen Untersuchung nur nützen. Der Verfasser baut den ersten Lese-Unterricht auf den Sachunterricht auf und sucht der Forderung nach einem lebensvollen Unterrichte gerecht zu werden. Eine Interjektion, ein Naturlaut oder ein Normalwort bildet den Ausgangspunkt für den eigentlichen Leseunterricht. Dann folgt die Hauptarbeit, „das langsame, lückenlose Zusammenziehen der Laute“. An das Lesen schliesst unmittelbar das Schreiben. Die Arbeit zeugt von einem tiefen Verständnis der Schwierigkeiten, die der erste Lese- und Schreibunterricht dem Kinde bietet. Jeder Elementarlehrer wird das Buch mit Gewinn lesen, ohne dass er des Verfassers Methode nachzuahmen braucht.

Dr. K.

Prüfer, Joh. Dr. *Quellen zur Geschichte der Kleinkindererziehung* (Diesterwegs deutsche Schulausgaben, Bd. 28). Frankfurt a. M., Moritz Diesterweg. 190 S. gb. M. 1.60.

Mit diesem Bändchen erweist Dr. Prüfer nicht bloss den Frauenschulen und Kindergärtnerinnen-Seminarien, an die er zunächst dachte, sondern auch den Lehrerseminarien und der Lehrerschaft überhaupt einen wirklichen Dienst. Wie viele kennen z. B. Heusingers Gedanken und Ausführungen über den Handarbeitsunterricht? Vieles klingt ganz neuzeitlich in seiner Schrift von 1797: Über die Benutzung der bei Kindern so tätigen Triebes, beschäftigt zu sein, die in die Mitte des Bändchens gestellt ist. Derselben voran gehen Auszüge aus K. Bitschin (1430): Von der Nachkommenschaft und der Mutterschule, A. Comenius: Aus der Mutterschule, aus Rousseaus Emil und Salzmanns Konrad Kiefer oder Anweisung zu einer