

# Die schiefachsige winkeltreue Zylinderprojektion der schweizerischen Landesvermessung : 1. Teil

Autor(en): **Scherrer, F. R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische pädagogische Zeitschrift**

Band (Jahr): **34 (1924)**

Heft 4

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-788632>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Täuschung, die in der Hoffnung auf dieses Ende bestanden hat. Zwar liegt die Enttäuschung über die Unvollendbarkeit eines Weges, den man mit grössten Erwartungen angetreten, vorläufig noch wie eine Depression auf den Gemütern. Sie hält die Forscher von der werktätigen Arbeit ein wenig ab, wirft sie aus der Betriebsamkeit der Realienforschung in die Kontemplation und Spekulation. Nichtsdestoweniger wächst dem Menschen aus dieser Wendung zur Anerkennung der metaphysischen Elemente des Lebens eine neue Art Stärke zu, und diese Energie, aus der Selbstreinigung der Geister geboren, kommt letzten Endes auch den Wissenschaften zugute.“  
(Schluss folgt.)

## **Die schiefachsige winkeltreue Zylinderprojektion der schweizerischen Landesvermessung.<sup>1)</sup>**

Für die Behandlung in Mittelschulen dargestellt von F. R. Scherrer  
(Küsnacht bei Zürich).

Die Landesvermessung und die Kartographie liefern Stoff zu einer Reihe von Aufgaben, die nicht nur mathematisch interessant, sondern zufolge ihrer Bedeutung für die Kultur geeignet sind, die Aufmerksamkeit auch solcher Schüler zu fesseln, die keine Vorliebe für die Mathematik haben.

In allen Mittelschulen wird man sich im mathematischen Unterricht auf die Besprechung der wichtigsten Kartenprojektionen beschränken müssen, zu denen wohl in erster Linie die Projektionsmethoden gehören, die im eigenen Lande zur Anwendung gelangen.

Die offiziellen schweizerischen Kartenwerke wurden bisher nach der Bonneschen Projektionsmethode entworfen, so benannt nach dem französischen Ingenieur Rigobert Bonne, der von 1727 bis 1795 gelebt und diese Projektion zwar nicht erfunden, aber empfohlen und auch selbst verwendet hat. Auf der Dufourkarte im Massstab 1:100,000 wurde sie analog wie in Frankreich als modifizierte Flamsteedsche Projektion bezeichnet. Das Kartenbild wird nach dieser Projektionsmethode folgendermassen hergestellt:

Man wählt im Innern des darzustellenden Landes als Kartenn Mittelpunkt einen Punkt  $M$ , dessen geographische Koordinaten mit grosser Genauigkeit bestimmt werden können. (Bei uns ist das ein Punkt im Keller der alten Sternwarte in Bern, die jetzt

---

<sup>1)</sup> Vortrag, gehalten zu Bern am 7. Oktober 1923 in der Versammlung des Vereins schweizerischer Mathematiklehrer.

als tellurisches Observatorium dient. Der Punkt ist auf einem Bronze-Bolzen durch einen Kreuzstrich bezeichnet.) Im Punkt  $M$  zieht man an die Meridianellipse eine Tangente und bringt sie mit der verlängerten Erdachse in  $C$  zum Schnitt. Ist nun  $P$  ein beliebiger Punkt der Erdoberfläche, dessen Parallelkreis den Meridian von  $M$  in  $P_0$  schneidet, so trägt man auf einer Geraden eine Strecke  $C' M'$  von der Länge  $CM$  ab, bestimmt alsdann, je nachdem  $P_0$  nördlich oder südlich von  $M$  liegt, entweder zwischen  $M'$  und  $C'$  oder auf der Verlängerung der Geraden  $C' M'$  über  $M'$  hinaus einen Punkt  $P_0'$  so, dass sein Abstand von  $M'$  gleich dem Meridianbogen  $M P_0$  wird, legt um  $C'$  als Mittelpunkt durch  $P_0'$  einen Kreis und trägt darauf einen Bogen  $P_0' P'$  von der Länge des Parallelkreisbogens  $P_0 P$  von  $P'$  nach rechts oder links ab, je nachdem  $P$  östlich oder westlich von  $P_0$  liegt, dann ist  $P'$  das Kartenbild des Punktes  $P$ . Der durch den Kartenmittelpunkt  $M$  gehende Meridian bildet sich längentreu auf der Geraden  $C' M'$  und die Parallelkreise längentreu auf Kreisen mit dem Mittelpunkt  $C'$  ab. Die Projektion ist infolgedessen flächentreu und daher nicht winkeltreu. Sie ergibt um so grössere Winkelverzerrungen, je weiter sich ein Punkt auf der Erdoberfläche gleichzeitig vom Meridian und Parallelkreis des Kartenmittelpunktes entfernt.<sup>1)</sup> Wer sich genauer über die Bonnesche Projektion informieren will, dem ist in erster Linie zu empfehlen: Otth, *Hauptfragen und Hauptmethoden der Kartenentwurfslehre*, Aarau 1911, sodann Rosenmund, *Die Änderung des Projektionssystems der schweizerischen Landesvermessung*, Bern 1903.

Bei unseren Schweizerkarten ergibt sich die grösste Winkelverzerrung bei Campocologno im Puschlav im Betrag von etwa  $1\frac{1}{3}'$ , während die Bestimmungen über die Triangulation vierter Ordnung vorschreiben, dass die Winkelfehler nicht über  $11''$  betragen sollen. Um dieser Forderung gerecht zu werden, haben die Kantone, denen die Ausführung der Triangulation vierter Ordnung obliegt, jeweils einen Punkt ihres Gebietes als Mittelpunkt einer Bonneschen Projektion angenommen, und ihre Dreiecksnetze in dieser dargestellt, wodurch sich kleine Winkelverzerrungen ergaben. Damit war aber der Nachteil verbunden, dass die Katasterpläne

<sup>1)</sup> Vergleiche: *Atlas für schweizerische Mittelschulen*, Winterthur 1910, Seite 7, Fig. 12.

aneinandergrenzender Kantone häufig nicht zusammenpassten, was dann umständliche Koordinatentransformationen nötig machte. Diesem Übelstande wurde im Jahre 1910 in der ganzen Schweiz dadurch abgeholfen, dass man zur Darstellung der Dreiecksnetze erster bis vierter Ordnung eine winkeltreue Projektion zu verwenden begann, die in engster Beziehung zur Mercatorprojektion steht, der man auch im schweizerischen Schulatlas Seite 124—127 begegnet.

Der Holländer Gerhard Mercator, der eigentlich Kremer hiess und von 1512—1594 lebte, betrachtete die Erdoberfläche als Kugelfläche und bildete sie winkeltreu auf eine Zylinderfläche ab, die die Erdkugel im Äquator berührt und dann nachträglich längs einer Erzeugenden aufgeschnitten und in eine Ebene ausgebreitet wird.

Denken wir uns die Oberfläche des Erdsphäroides durch konforme Abbildung in eine Kugelfläche übergeführt, drehen dann die Achse der Zylinderfläche, welche die Kugel längs dem Äquator berührt, in der Meridianebene des Mittelpunktes unserer Schweizerkarte, bis der Berührungskreis durch diesen Punkt geht, und entwerfen auf der Zylinderfläche eine winkeltreue Projektion der Kugelfläche, so erhalten wir als Abwicklung der Zylinderfläche in eine Ebene das gegenwärtige Projektionssystem der Schweizerischen Landes- und Grundbuchvermessung, das die als schiefachsige winkeltreue Zylinderprojektion bezeichnet wird. Ob die zukünftigen Schweizerkarten auch in dieser Projektion entworfen werden, oder ob für diese die Bonnesche Projektion beibehalten wird, ist eine gegenwärtig noch unentschiedene Frage.

Die Rolle des Äquators bei der Mercatorprojektion spielt bei der schiefachsigen winkeltreuen Zylinderprojektion der durch den Kartenmittelpunkt der Schweizerkarten normal zu dessen Meridian gelegte Hauptkreis und die Rolle des Nordpols der auf der nördlichen Halbkugel liegende Schnittpunkt der Achse der Zylinderfläche, die die Kugelfläche längs dem genannten Grosskreis berührt. Weil sich die sphärischen Koordinaten eines Punktes in bezug auf diesen Kreis als Grundkreis aus sphärischen Koordinaten, die sich auf den Äquator beziehen, leicht berechnen lassen, so wird man die Koordinaten eines Kartenpunktes aus den sphärischen Äquator-Koordinaten des Originalpunktes bestimmen können, sobald man diese Berechnung für die Mercator-



projektion auszuführen imstande ist. Wir beschäftigen uns daher von jetzt an mit der letzteren.

Die Punkte des Äquators bilden sich in sich selbst ab. Die Projektion eines vollen Meridiankreises besteht aus den beiden Erzeugenden, worin dessen Ebene von der Zylinderfläche geschnitten wird. Weil die Projektion winkeltreu ist, so sind die Bilder aller Parallelkreise Kreise der Zylinderfläche. Jedes beliebig grosse oder kleine Stück des Parallelkreises in der geographischen Breite  $\alpha$  wird also durch die Abbildung im Verhältnis  $\frac{1}{\cos \alpha}$  vergrössert. Es sei nun  $P$  ein Punkt der Erdkugel-  
fläche in der geographischen Breite  $\alpha$ ,  $Q$  ein Punkt auf dem Meridian,  $R$  ein Punkt auf dem Parallelkreis von  $P$ , und es seien alle drei Seiten des Dreiecks  $PQR$  so klein, dass der Breitenunterschied von  $P$  und  $Q$  bei der Rechnung ausser Betracht fällt, dann wird bei der Abbildung die Seite  $PR$  im Verhältnis  $\frac{1}{\cos \alpha}$  vergrössert; folglich muss, damit das projizierte Dreieck dieselben Winkel erhält, wie das ursprüngliche, auch die Seite  $PQ$  bei der Abbildung im Verhältnis  $\frac{1}{\cos \alpha}$  vergrössert

werden. Die Länge des Bildes eines Bogenelementes  $PQ$  eines Meridians ergibt sich demnach, indem man (Fig. 1) durch  $P$  eine Parallele zur Erdachse  $ON$  zieht und sie mit dem Erdradius  $OQ$  in  $Q^*$  schneidet; das Bild von  $PQ$  hat dann, weil der Winkel  $QPQ^* = \alpha$  ist, die Länge  $PQ^*$ . Bedeutet  $A$  den Schnittpunkt des Meridians mit dem Äquator, so wird das Bild  $AP'$  des Meridianbogens  $AP$  erhalten, indem man  $AP$  in unendlich viele unendlich kleine Bogenstücke zerlegt, für jedes diese Konstruktion ausführt und dann die erhaltenen Strecken aneinander fügt, was sich praktisch nicht durchführen lässt. Es muss daher das Bild von  $AP$  auf dem Wege der Rechnung ermittelt werden.

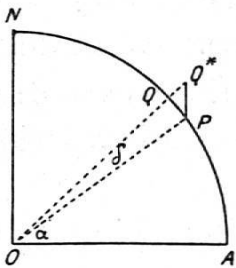


Fig. 1.

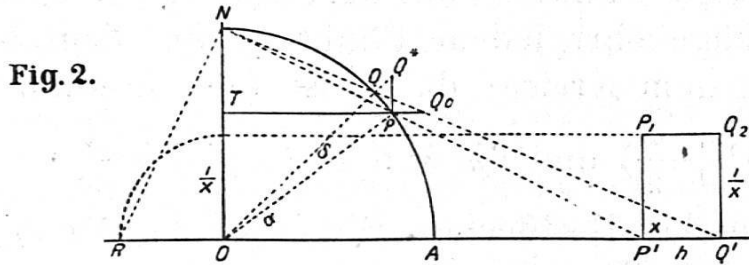
das Bild von  $PQ$  hat dann, weil der Winkel  $QPQ^* = \alpha$  ist, die Länge  $PQ^*$ . Bedeutet  $A$  den Schnittpunkt des Meridians mit dem Äquator, so wird das Bild  $AP'$  des Meridianbogens  $AP$  erhalten, indem man  $AP$  in unendlich viele unendlich kleine Bogenstücke zerlegt, für jedes diese Konstruktion ausführt und dann die erhaltenen Strecken aneinander fügt, was sich praktisch nicht durchführen lässt. Es muss daher das Bild von  $AP$  auf dem Wege der Rechnung ermittelt werden.

Bezogen auf den Kugelradius als Längeneinheit wird die

Länge des Bildes von  $AP$  dargestellt durch  $\int_0^{\text{arc } \alpha} \frac{dx}{\cos x}$ . Um es

auf möglichst elementarem Wege zu bestimmen, ziehen wir durch  $P$  (Fig. 2) eine Parallele zum Erdradius  $AO$ , die die Erd-

achse  $ON$  in  $T$  schneidet, verbinden  $P$  und  $Q$  mit dem Nordpol  $N$ , dann schneidet  $NQ$  die Gerade  $TP$  in  $Q_0$ , ferner wird die Gerade  $OA$  von  $NP$  in  $P'$  und von  $NQ$  in  $Q'$  geschnitten. Die geographische Breite von  $P$  sei wiederum  $\alpha$  und die von



$Q$   $\alpha + \delta$ , wo  $\delta$  verschwindend klein gedacht ist. Das Bogenelement  $PQ$  hat also die Masszahl  $\text{arc } \delta$  und sein Bild die Länge  $\frac{\text{arc } \delta}{\cos \alpha}$ .

$$\text{Ferner ist } \angle PNO = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}, \quad \angle QNO = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2},$$

$$\text{daher } \angle NQ_0T = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2}.$$

Der Winkel  $PQ_0Q$  ist gleich dem Winkel, den die Tangente in  $Q$  mit der Sehne  $QN$  bildet, über der der Zentriwinkel  $90^\circ - \alpha - \delta$  steht, daher auch gleich  $45^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2}$ ; somit ist das Dreieck  $QPQ_0$

gleichschenkelig, und daher  $PQ_0 = \text{arc } \delta$ , überdies  $PT = \cos \alpha$ . Es verhält sich nun  $P'Q' : OP' = PQ_0 : TP$  also auch, wenn man die Masszahl von  $P'Q'$  mit  $h$  und die von  $OP'$  mit  $x$  bezeichnet

$$h : x = \text{arc } \delta : \cos \alpha.$$

Demnach ist

$$h \cdot \frac{1}{x} = \frac{\text{arc } \delta}{\cos \alpha}.$$

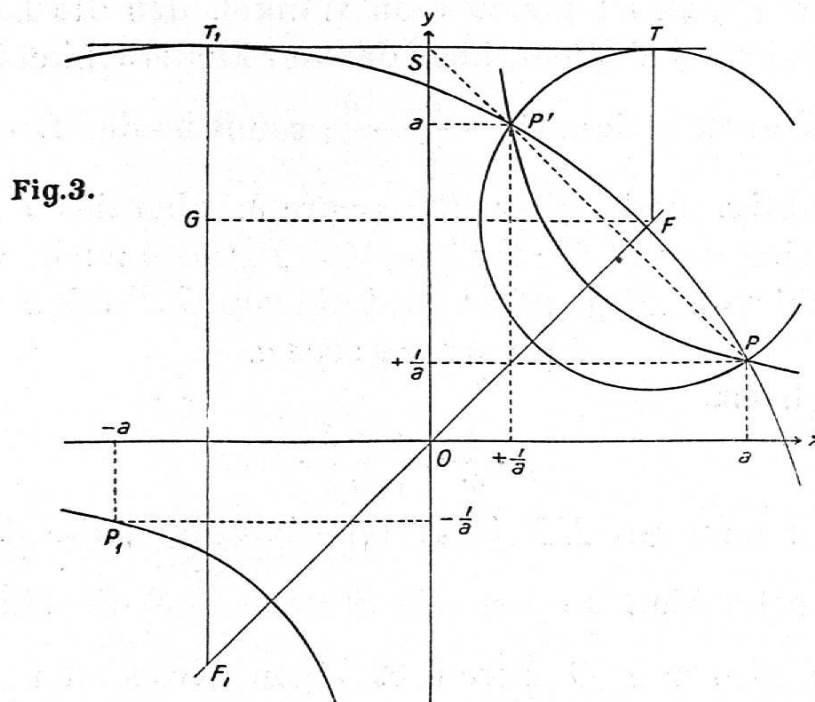
Errichtet man auf  $NP$  in  $N$  eine Normale, die die Gerade  $OA$  in  $R$  schneidet, so hat die Strecke  $OR$  die Masszahl  $\frac{1}{x}$ . Zieht man also um  $O$  durch  $R$  einen Kreis, der  $ON$  in  $S$  trifft, legt durch diesen Punkt eine Parallele zu  $OA$ , welche die durch  $P'$  und  $Q'$  gelegten Parallelen zu  $ON$  in  $P_1$  und  $Q_2$  schneidet, so hat das Rechteck  $P'Q'Q_2P_1$  die Flächenmasszahl  $h \cdot \frac{1}{x}$ , die gleich  $\frac{\text{arc } \delta}{\cos \alpha}$  ist. Dieses Rechteck hat also, wenn  $\delta$  verschwin-

dend klein ist, bezogen auf das Quadrat des Kugelradius als Flächeneinheit, dieselbe Masszahl wie das Bild des Bogenelementes  $PQ$ , bezogen auf den Kugelradius als Längeneinheit. Jedem Punkt  $P$  auf dem rechts von der Geraden  $ON$  liegenden Halbkreis ist ein Punkt  $P'$  auf dem Halbstrahl  $OA$  zugeordnet und auch umgekehrt jedem Punkt  $P'$  auf dem letzteren ein Punkt  $P$  auf dem Kreise; dabei ist die Masszahl  $x$  von  $OP'$  gleich  $\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\alpha}{2})$  und die von  $P'P_1$  gleich  $\frac{1}{x}$ .

Die Höhe des Rechteckes  $P'Q'Q_2Q_1P_1$  hängt also allein von der Lage des Punktes  $P$  auf dem Kreise, dagegen die Basis und die Fläche des Rechteckes auch von der Länge des Bogenstückes  $PQ$  ab und verschwindet mit diesem. Wählen wir  $OA$  als positive  $x$ - und  $ON$  als positive  $y$ -Achse eines Koordinatensystems und bezeichnen die Koordinaten von  $P_1$  mit  $x$  und  $y$ , so ist, wo auch  $P$  auf dem Halbkreis liegen mag, stets

$$y = \frac{1}{x}.$$

Durchläuft  $P$  den Halbkreis, dann bewegt sich  $P_1$  auf der



Kurve, welche die Funktion  $y = \frac{1}{x}$  graphisch darstellt. Für unsere Zwecke ist es nicht unbedingt nötig, diese Kurve zu kennen; mit Rücksicht auf die Bedeutung, die der Funktion  $\frac{1}{x}$  zukommt, wollen wir sie jedoch bestimmen.

Hat der Kurvenpunkt  $P$  in der Fig. 3 die Abszisse  $a$  und die Ordinate  $\frac{1}{a}$ , so gehört der Punkt  $P'$  mit der Abszisse  $\frac{1}{a}$  und der Ordinate  $a$  der Kurve ebenfalls an und liegt symmetrisch zu  $P$  in bezug auf die Halbierungslinie des Winkels der positiven Koordinatenachsen; überdies ist auch der Punkt  $P_1$  mit den Koordinaten  $-a$  und  $-\frac{1}{a}$  ein Punkt der Kurve; sie ist folglich auch zentr.-symmetrisch in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt  $O$ . Der Schnittpunkt  $S$  der Geraden  $PP'$  mit der  $y$ -Achse hat von  $P$  den Abstand  $a\sqrt{2}$  und von  $P'$  den Abstand  $\frac{1}{a}\sqrt{2}$ . Wenn man also durch  $P$  und  $P'$  einen Kreis legt, so haben die von  $S$  daran gelegten Tangenten immer die Masszahl  $\sqrt{2}$ . Legen wir durch  $S$  eine Parallele zur  $x$ -Achse und konstruieren die beiden durch  $P$  und  $P'$  gehenden Kreise, die diese Gerade berühren, so haben die Abstände ihrer Berührungspunkte  $T$  und  $T_1$  von  $S$  die Masszahl  $\sqrt{2}$ . Die Mittelpunkte  $F$  und  $F_1$  der beiden Kreise liegen auf der genannten Symmetrieachse im Abstand  $\sqrt{2}$  von der  $y$ -Achse, haben daher eine feste Lage. Ziehen wir durch  $F$  eine Parallele zur  $x$ -Achse, die  $F_1T_1$  in  $G$  schneidet, so ist  $F_1G$  gleich dem Unterschied der beiden Kreisradien, also auch gleich dem Unterschied der Abstände des Kurvenpunktes  $P$  von  $F_1$  und  $F$ . Dieser Unterschied ist somit konstant und daher die graphische Darstellung der Funktion  $\frac{1}{x}$  eine Hyperbel, die die Koordinatenachsen zu Asymptoten und die Punkte mit den Koordinaten  $1, 1$  und  $-1, -1$  zu Scheiteln hat.

(Schluss folgt.)

## Gesamtunterricht oder Fächertrennung?

Die staatliche Stelle für Naturdenkmalpflege in Preussen hat im April d. J. eine Studiengemeinschaft für wissenschaftliche Heimatkunde gegründet, die einen unerwartet grossen Kreis von Männern und Frauen aus den verschiedensten Berufsschichten vereinigt hat. Zur Eröffnung der Studiengemeinschaft hielt Prof. Eduard Spranger einen Vortrag über den Bildungswert der Heimatkunde. Er ist jetzt veröffentlicht und damit weiteren Kreisen zugänglich gemacht worden. Der Vortrag ist deshalb von grösster Bedeutung, weil in ihm ein Bildungsprogramm entwickelt wird, das Wissenschaft und Bildung