Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift

Band: 34 (1924)

Heft: 5

Artikel: Die schiefachsige winkeltreue Zylinderprojektion der schweizerischen Landesvermessung : 2. Teil

Autor: Scherrer, F. R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-788638

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

um das Kind aus der Sphäre des Wortes in die der Tat zu führen, nicht zu mindest durch sein eigenes, nimmer müdes Vorangehen in dieser Richtung. Selber Ernst machen, das ist die Losung für den Erzieher. So gewinnen wir vom Wesen des Kindes aus den Leitsatz: Man fördere im Religionsunterricht die spontane Aktivität der Kinder in intellektueller und emotionaler Richtung, dann erzieht man sie zu Menschen mit einer selbständigen, innerlich wahrhaftigen Religion.

(Schluss folgt.)

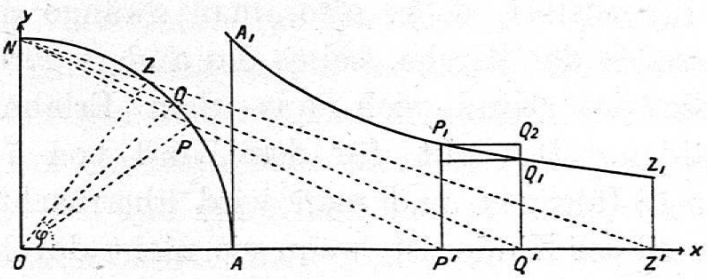
Die schiefachsige winkeltreue Zylinderprojektion der schweizerischen Landesvermessung.

Für die Behandlung in Mittelschulen dargestellt von F. R. Scherrer (Küsnacht bei Zürich).

II.

Um nun die Masszahl der Strecke zu erhalten, die in der Mercatorprojektion den Meridianbogen AZ (Fig. 4) abbildet,

Fig. 4.



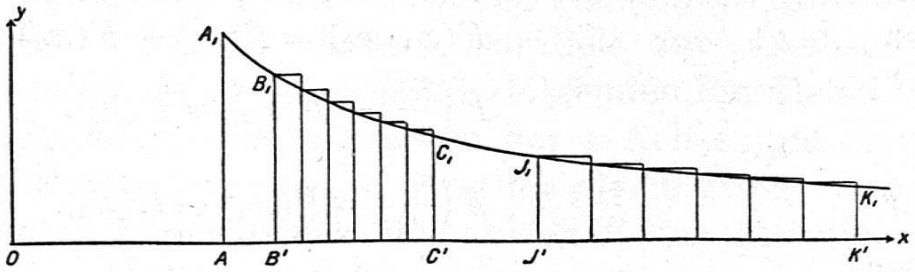
schneiden wir NZ mit der x-Achse in Z', zerlegen den Bogen AZ in viele kleine Bogenstücke, dann entspricht jedem Bogenelement PQ ein Rechteck $P'Q'Q_2P_1$, dessen Masszahl um so genauer mit der der Strecke übereinstimmt, die PQ abbildet, je kleiner das letztere Bogenstück ist. Lässt man die Zahl der Bogenstücke, in die man AZ zerlegt, ohne Ende wachsen, so geht die Fläche aller zwischen AA_1 und $Z'Z_1$ liegenden Rechtecke in das zwischen diesen Geraden liegende Flächenstück über, das unterhalb von der x-Achse und oberhalb von dem Hyperbelbogen A_1Z_1 begrenzt wird. Die Masszahl dieser Fläche stimmt also genau überein mit der Masszahl des Bildes des Meridianbogens AZ. Die Masszahl des über AP liegenden Flächenstückes ist offenbar eine Funktion $F(x)$ der Abszisse x des Punktes P_1. Hat die Strecke $P'Q'$ die Masszahl h, so ergibt sich aus der Figur

$$h\frac{1}{x} > F(x+h) - F(x) > h\frac{1}{x+h},$$

woraus folgt: $$\lim_{h=o} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{x}.$$

Die erste Ableitung der Funktion $F(x)$ ist also $\frac{1}{x}$, überdies hat die Funktion für $x=1$ den Wert 0. Auf Grund dieser Eigenschaft hat Jules Tannery auf Seite 283 seiner sehr lesenswerten *Notions de Mathématiques,* Paris, Delagrave, 2e édition, 1903,[1]) die, beiläufig gesagt, einen von Paul Tannery, dem bekannten Historiker der Mathematik, verfassten historischen Anhang enthalten, auf bemerkenswerte Weise die Funktion $F(x)$ bestimmt. Es möge hier zu demselben Zweck ein anderer Weg eingeschlagen werden, auf dem die Schüler vermutlich etwas leichter zu folgen vermögen. Wir grenzen in Figur 5 auf der

Fig. 5.



x-Achse zwei Strecken $B'C'$ und $J'K'$ in der Weise ab, dass die Punkte $B'C'$ und $J'K'$ der Reihe nach die Abszissen $x_1, x_1+d, x_1 l$ und $(x_1+d)l$ erhalten, wo d und l beliebige, absolute Zahlen sind; teilen sodann sowohl $B'C'$ als auch $I'K'$ in n gleiche Teile und konstruieren über jedem Teil ein Rechteck so, dass die obere Ecke links auf der Hyperbel liegt, dann hat das $k+1^{\text{te}}$ der über $B'C'$ liegenden Rechtecke die Fläche $\frac{d}{n} \cdot \frac{1}{x_1 + \frac{k}{n} d}$ und das $k+1^{\text{te}}$ der über $J'K'$ liegenden Recht-

die Fläche $\frac{dl}{n} \cdot \frac{1}{x_1 l + \frac{k}{n} dl}$; folglich sind diese beiden Rechtecke

[1]) Siehe auch: *Elemente der Mathematik.* Von J. Tannery, Professor an der Universität Paris. Mit einem geschichtlichen Anhang von P. Tannery. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. P. Klaess. Mit einem Einführungswort von Geh. Reg.-Rat F. Klein, Professor an der Universität Göttingen. Leipzig, Teubner, 1909.

flächengleich, daher ist auch die Summe aller Rechtecke über $J'K'$ ebenso gross wie die Summe aller Rechtecke über $B'C'$. Lässt man n ohne Ende wachsen, so geht die Summe der Rechtecke über $B'C'$ in das zwischen $B'B_1$ und $C'C_1$ liegende und die Summe aller Rechtecke über $J'K'$ in das zwischen $J'J_1$ und $K'K_1$ liegende Flächenstück über, das unterhalb von der x-Achse und oberhalb von der Hyperbel begrenzt wird. Das heisst: Begrenzt man auf der x-Achse zwei Strecken so, dass in der gleichen Fortschreitungsrichtung die Abszissen ihrer Endpunkte denen ihrer Anfangspunkte proportional sind, so liegen über diesen Strecken gleich grosse oberhalb von der Hyperbel begrenzte Flächenstücke.

Aus dieser Beziehung folgt

$$F(x_1 \cdot x_2) - F(x_2) = F(x_1) - F(1).$$

Da aber $$F(1) = 0,$$

so ist $$F(x_1 \cdot x_2) = F(x_1) + F(x_2)$$

und $$F\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + F(x_2) = F(x_1),$$

daher $$F\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = F(x_1) - F(x_2).$$

Ferner

$$F(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots x_n) = F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + \cdots F(x_n),$$

somit $$F(x^n) = n F(x),$$

und $$q F\left(\sqrt[q]{x}\right) = F(x),$$

daher $$F\left(\sqrt[q]{x}\right) = \frac{F(x)}{q}$$

und $$p \frac{F(x)}{q} = p F\left(\sqrt[q]{x}\right) = F\left(x^{\frac{p}{q}}\right).$$

Bezeichnen wir denjenigen Wert von x, für welchen $F(x)$ gleich 1 wird mit e, so ist

$$F(e) = 1,$$

somit $$F\left(e^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q},$$

und da eine Potenz mit irrationalem Exponenten der Grenzwert ist, dem sich eine Potenz mit rationalem Exponenten dann nähert, wenn sich der letztere der betreffenden irrationalen Zahl ohne Ende nähert, so ist

$$F\left(e^{\xi}\right) = \xi,$$

wo ξ eine beliebige reelle Zahl bezeichnet. Setzt man $e^{\xi} = x$, so ist $\xi = {}^{e}\log x$; folglich

$$F(x) = {}^{e}\log x.$$

Nun ist aber

$$x = \operatorname{tg}\left(45^{0} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Wenn also der Punkt Z die geographische Breite φ besitzt, so wird der Meridianbogen AZ abgebildet durch eine Strecke von der Länge ${}^{e}\log \operatorname{tg}\left(45^{0} + \frac{\varphi}{2}\right)$

oder ${}^{e}\log 10 \cdot {}^{10}\log \operatorname{tg}\left(45^{0} + \frac{\varphi}{2}\right)$.

Um ${}^{e}\log 10$ zu bestimmen, wählen wir zunächst eine beliebig grosse, natürliche Zahl k und bezeichnen $\sqrt[k]{10}$ mit q, ziehen durch die Punkte der x-Achse, die der Reihe nach die Abszissen $1, q, q^{2}, q^{3} \cdots\cdots q^{k} (= 10)$ haben, Parallele zur y-Achse; dann sind die zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Parallelen liegenden Flächenstücke, die unten von der x-Achse und oben von der Hyperbel begrenzt werden, sämtlich gleich gross. Verbinden wir bei jedem Flächenstück die oberen Ecken geradlinig miteinander, so erhalten wir k-Trapeze, von denen jedes denselben Flächeninhalt hat wie das erste, nämlich

$$(q-1)\frac{1+\frac{1}{q}}{2} = \frac{1}{2}\left(q - \frac{1}{q}\right);$$

folglich ist

$${}^{e}\log 10 = \lim_{k=\infty} \frac{k}{2}\left(q - \frac{1}{q}\right),$$

wo q die $\sqrt[k]{10}$ bedeutet.

Dabei nähert sich $\frac{k}{2}\left(q - \frac{1}{q}\right)$ mit wachsendem k abnehmend der Grenze ${}^{e}\log 10$. Damit wir $\sqrt[k]{10}$ bequem mit hinlänglicher Genauigkeit ausrechnen können, nehmen wir $k = 2^{n+1}$ an und erhalten so

$${}^{e}\log 10 = \lim_{n=\infty} 2^{n}\left(\sqrt[2^{n+1}]{10} - \frac{1}{\sqrt[2^{n+1}]{10}}\right),$$

oder

$$^e\log 10 = \lim_{n=\infty} 2^n \frac{\sqrt[2^n]{10}-1}{\sqrt[2^{n+1}]{10}}.$$

Es soll jetzt noch entschieden werden, wie weit man mit den aufeinanderfolgenden Quadratwurzelausziehungen gehen muss, damit man $^e\log 10$ auf 5 Dezimalstellen genau erhält. Wir setzen zu diesem Zweck

$$2^n \frac{\sqrt[2^n]{10}-1}{\sqrt[2^{n+1}]{10}} = F_n.$$

Sobald n hinlänglich gross ist, wird $\sqrt[2^n]{10}$ nur um wenig grösser als 1 sein; man darf daher

$$\sqrt[2^{n+1}]{10} = 1+\varepsilon$$

setzen, wo ε um so kleiner ausfällt, je grösser n ist, und erhält dann

$$F_n = 2^n \frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{1+\varepsilon} = 2^n\left[2\varepsilon-\varepsilon^2+\varepsilon^3-\varepsilon^4+\cdots\right]$$

und

$$F_{n+1} = 2^{n+1} \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}.$$

Zieht man aus $1+\varepsilon$ in der üblichen Weise die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$F_{n+1} = 2^{n+1} \frac{\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}+\frac{\varepsilon^3}{16}-\cdots}$$

oder, wenn man die Division ausführt,

$$F_{n+1} = 2^{n+1}\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{3}{8}\varepsilon^3-\frac{5}{16}\varepsilon^4\cdots\right)$$

$$= 2^n\left(2\varepsilon-\varepsilon^2+\frac{3}{4}\varepsilon^3-\frac{5}{8}\varepsilon^4\cdots\right);$$

somit ist

$$F_n - F_{n+1} \asymp 2^n\left(\frac{\varepsilon^3}{4} - \frac{3}{8}\varepsilon^4\right) < 2^{n-2}\varepsilon^3.$$ [1]

Da nun $\sqrt{1+\varepsilon} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ ist, also bei jeder folgenden Radizierung der Überschuss der Wurzel über 1 sich auf weniger als die Hälfte reduziert, so besteht die endlose Reihe von Ungleichheiten

$$\begin{aligned} F_n - F_{n+1} &< 2^{n-2}\varepsilon^3 \\ F_{n+1} - F_{n+2} &< 2^{n-4}\varepsilon^3 \\ F_{n+2} - F_{n+3} &< 2^{n-6}\varepsilon^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

daher

$$F_n - F_\infty < 2^{n-2}\varepsilon^3 + 2^{n-4}\varepsilon^3 + 2^{n-6}\varepsilon^3 + \cdots \text{ ad inf.}$$

$$F_n - F_\infty < 2^{n-2}\varepsilon^3 \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2^n}{3}\varepsilon^3.$$

F_n ist also um weniger als $\frac{2^n}{3}\varepsilon^3$ grösser als ${}^e\log 10$. Wählen wir $n = 9$, so erhalten wir

$$\sqrt[2^{n+1}]{10} = \sqrt[2^{10}]{10} = 1{,}002251148\,(3);$$

also ist dann

$$\varepsilon = 0{,}002251148\,(3) \asymp \frac{9}{4}10^{-3};$$

daher

$$F_9 - F_\infty < \frac{2^9}{3}\cdot\frac{9^3}{4^2}\cdot 10^{-9} = 1944\cdot 10^{-9} < 2\cdot 10^{-6}.$$

Somit ist auf 5 Dezimalstellen genau

$${}^e\log 10 = 2^9\,\frac{\sqrt[2^9]{10} - 1}{\sqrt[2^{10}]{10}},$$

[1]) Das Zeichen $\asymp$ bedeutet „annähernd gleich“.

oder

$$^{e}\log 10 \asymp 512 \frac{1{,}004507364(3) - 1}{1{,}002251148(3)},$$

das heisst $^{e}\log 10 = 2{,}30259 \cdots$

Das Bild des Meridianbogens AZ in Fig. 4 hat demnach bezogen auf den Kugelradius als Längeneinheit die Masszahl

$$2{,}30259 \log \operatorname{tg}\left(45^{0} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Bei der schiefachsigen winkeltreuen Zylinderprojektion der Schweiz tritt an Stelle des Äquators a (Fig. 6) als Berührungs-

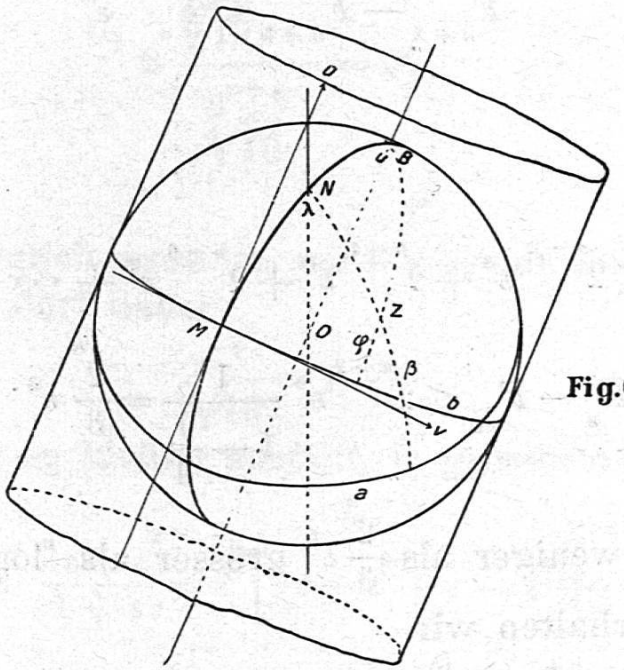


Fig. 6.

kreis der Zylinderfläche der durch den in Bern befindlichen Kartenmittelpunkt M gehende Grosskreis b, der normal zum Meridian dieses Punktes liegt. Zieht man in M an diese beiden Grosskreise die Tangenten und wickelt die Zylinderfläche in deren Verbindungsebene ab, so erhält man die Projektion, in der unsere Triangulationsnetze dargestellt werden. Bezeichnet λ die östliche Länge eines Punktes Z der Erdoberfläche in bezug auf den Meridian des Kartenmittelpunktes und β seine nördliche Breite, so berechnet man vermittelst des sphärischen Dreieckes NBZ, wo N den Pol des Äquators und B den des Berührungskreises b bezeichnet, den sphärischen Abstand φ des Punktes Z von b und den Winkel $MBZ = \mu$. Bezogen auf die nach Norden gerichtete Meridiantangente von M als positive u—, die in M nach Osten gerichtete Tangente des Kreises b als

positive v-Achse eines Koordinatensystems und den Kugelradius als Längeneinheit hat die Projektion des Punktes Z die Koordinaten

$$u = 2{,}30259 \log \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) \text{ und } v = \operatorname{arc} \mu.$$

Weil φ die Amplitude zum Argument $u = \ln \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$ der hyperbolischen Funktionen ist, ermöglichen die Tafeln der letzteren zu jedem Wert von φ den von u direkt abzulesen.

Die Ursachen des materialistischen Zeitgeistes und seine Relation zur Schule.

Von Dr. B. Hofstetter.

II.

Nicht nur in theologischen und philosophischen, sondern auch in naturwissenschaftlichen Kreisen kommt gegenwärtig das Bewusstsein immer stärker zur Geltung, dass man sehr wohl mit gutem wissenschaftlichem und religiösem Gewissen beides zugleich sein kann, ein überzeugter Anhänger christlicher Weltanschauung und ein konsequenter Vertreter exakter Naturwissenschaft. Allerdings kann die geringste Grenzüberschreitung auf einer der beiden Seiten zu unauflöslichen Konflikten führen. Grenzüberschreitungen liegen z. B. vor, wenn man zur Ausfüllung von unbequemen Lücken in Erkenntnissen Zuflucht zur Hypothese nimmt. Die Hypothesen haben als Leitfaden für die Forschung, als Arbeitsmethoden ihren grossen Wert; deshalb werden sie aber noch keineswegs zur Wahrheit gestempelt. Das Problem von Leib und Seele und deren Wesen wird dadurch nicht gelöst. „Freilich, sagt der Philosoph Schelling, das gerade bildet die Halbwisser, die Halbaufgeklärten, die ohne alle tiefere Bildung, ja ohne die geringste Ahnung, wieviel dazu gehört, um über irgendeine die Menschheit interessierende Frage ein wahres oder erleuchtetes Wort zu sagen, über die tiefsten Gegenstände aburteilen.“

Der Naturalist, indem er die ganze Weite der Welt überdachte, hat etwas vergessen, was im Grunde das Allernächste ist, er hat sich selbst, die eigene Seele vergessen. Die Leere und Sinnlosigkeit, in die nach der naturalistisch-materialistischen Lebensordnung das Leben gerät, ist augenscheinlich und auf die Dauer unerträglich; denn, was wird hier aus der Menschheit? Kein inneres Band verknüpft sie mit dem All, kein inneres Band verknüpft die Menschen untereinander. Ein jeder müht und hastet sich ab im wilden Lebenskampfe, um sein Dasein so angenehm wie möglich zu gestalten. Indem die einzelnen Individuen nach der Besonderheit ihrer Art, ihrer Lage, ihrem Beruf an verschiedenen Punkten Stellung nehmen und verschiedene Rich-