Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift

Band: 35 (1925)

Heft: 4

Artikel: Die Grundlagen der Euklidischen Geometrie im Unterricht : 1. Teil

Autor: Merz, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-788513

bildung der Lehrer, für die Erziehung der Erzieher der eigentliche Weg gewiesen ist?

Wir reden bei der Erörterung der Lehrerbildungsfrage so viel von der Notwendigkeit „wissenschaftlicher“ Bildung, wir streiten uns darüber, wo diese wissenschaftliche Bildung zu erlangen sei. Vergessen wir dabei nicht gar zu leicht das Beste und Höchste? Dass es darauf ankommt, in dem künftigen Lehrer alle rein menschlichen Werte, alle formenden, gestaltenden, bildenden, erziehenden Kräfte zu entwickeln, in ihm jene Berufsgesinnung zu erzeugen, die ihn davor bewahrt, dass seine Seele tagelöhnert, dass er ein Stundenhalter und Sklave des Uhrzeigers wird? Vergessen wir nicht, dass warmherzige Hingabe höher steht als alle Theorie, pädagogische Gesinnung höher als alle Technik, die Tat höher als alle Worte, das pädagogische Gewissen höher als alles pädagogische Wissen?

„Kaum seh' ich ein Menschengesicht, so hab ich's wieder lieb,“ sagte der Dichter, und an die Freundin schrieb er: „Eine Liebe und ein Vertrauen ohne Grenzen ist mir zur Gewohnheit geworden.“ Könnte das jeder Lehrer und Erzieher von sich sagen, dann hätte er seine Eignung erwiesen, dann hätte er sein Inneres für seinen Beruf emporgeläutert.

„Jede Kunst verlangt den ganzen Menschen, der höchstmöglichste Grad die ganze Menschheit.“ Nicht weniger ist Erziehung und Bildung eine Angelegenheit der ganzen Menschheit und verlangt bei ihrer Ausübung den ganzen Menschen, den durch Selbsterziehung gewordenen Menschen.

„In der Kunst und Poesie ist die Persönlichkeit alles.“ Nicht weniger ist in der Erziehung die Persönlichkeit alles.

Und so stehe denn als letztes Wort des Meisters:

„Man muss etwas sein, um etwas zu machen.“

„Der Mensch wirkt alles, was er vermag, auf den Menschen durch seine Persönlichkeit.“

Die Grundlagen der Euklidischen Geometrie im Unterricht.

Von Dr. K. Merz, Professor in Chur.

Die Geometrie bildet das Musterbeispiel einer rein nach den strengen Gesetzen der Logik aufgebauten Wissenschaft, die sich auf äussere anschauliche Gebilde bezieht und das System des Euklid erscheint als das Ideal einer formvollendeten Fassung der wissenschaftlichen

Erkenntnisse des Raumes[1]). Doch bildet die Einführung der Eigenschaften paralleler Geraden eine kritische Stelle, die aber der weitere Erfolg der Entwicklungen leicht als überwunden hinzunehmen verleitet. Denn sobald die Geometrie im Unterricht nach einem meist üblichen theoretischen Teil über Gerade und Winkel zu den Konstruktionen der Figuren übergegangen ist, entwickelt sie sich in einer in allen Beziehungen sichern und wohlgefügten Weise, welche für die Schulung des Geistes von grösstem Werte ist durch die Erfassung der Gründe der erkannten Eigenschaften der Figuren und durch die anschauliche Darstellung der Gebilde.

Daher dürfte es geboten sein, die Methode der Konstruktion schon in den ersten Anfängen der Geometrie zur Anwendung zu bringen und überhaupt alle Figuren sogleich in ihrer genau beschriebenen Entstehung zu erkennen. In diesen Ausführungen versuche ich in diesem Sinne die Euklidische Geometrie aus dem Grundsatz der Übertragbarkeit der Strecke zu entwickeln. Nach den neueren Anschauungen ist sie die Geometrie der starren Körper und ihre Gültigkeit ist nur denkbar in Anlehnung an physikalische Vorgänge. Die geometrischen Konstruktionen erscheinen daher als eine Art physikalischer Experimente, die unter gewissen Voraussetzungen über die Wirklichkeit ausgeführt werden, und die Lehren der Euklidischen Geometrie beziehen sich nicht auf irgend etwas Absolutes, rein Formales, wenn auch allgemeine logische Methoden in die Schlussfolgerungen eingehen. Das absolut Seiende, wie es der alten Philosophie vorschwebte und daher den Gang der geometrischen Entwicklung beeinflusste, tritt also nicht als Inhalt der Geometrie zutage, sondern leitet nur ihren Gang durch die begrifflichen Verknüpfungen in der konstruktiven Entstehung ihrer Gebilde.

Der wesentliche Vorteil der Begründung der Euklidischen Geometrie durch die Übertragbarkeit der Strecke liegt in der Einheitlichkeit der Entwicklung und des Beweisverfahrens und ferner noch darin, dass man dadurch auch zu den Eigenschaften paralleler Geraden geführt wird, ohne zum voraus ein besonderes Axiom mit dem unbestimmten Unendlichen darüber aufzustellen. Die der Wirklichkeit entnommene Methode der Übertragung der Strecke tritt als Element in die logischen Verknüpfungen, veranschaulicht die zwingenden Zuordnungen in den Figuren und führt zu derjenigen Eigenschaft der parallelen Geraden, durch welche das System der grundlegenden Sätze abgeschlossen werden muss, um zu Strecke und Kreis auch parallele Gerade als Mittel zu den weitern Konstruktionen verwenden zu können

1. **Strecke und Gerade.** Der Begriff der Strecke entwickelt sich aus Beobachtungen vornehmlich beim Zeichnen. Eine Kante des Lineals muss als vorbildliche Darstellung der Strecke angenommen werden und die Prüfung, ob die damit gezeichnete Linie dem Begriff genüge, geschieht durch Wenden des Lineals und durch die Beobachtung, ob dabei eine, die zuerst gezeichnete Linie deckende, erzielt

[1]) Siehe diese Zeitschrift 1918, Heft 1/2: Zur Erkenntnistheorie über Raum und Zahl.

wird. Dabei wird eine ebene Zeichnungsfläche vorausgesetzt, d. h. es ist zuerst nachzuschauen, ob die Kante, welche durch Visieren, also durch den Gang der Lichtstrahlen als gerade erkannt wird, überall nach allen Richtungen auf der Fläche aufliegt. Als erste Forderung wird verlangt, dass zwischen zwei Punkten A und B nur eine einzige Strecke AB besteht, dass also nur eine einzige gerade Verbindungslinie zwischen ihnen möglich ist. Jede Strecke kann nach beiden Seiten beliebig verlängert werden, wodurch eine Gerade g entsteht, welche als unendlich lang gedacht wird, da man sich nicht vorstellen kann, dass die Verlängerung an irgendeiner Stelle nicht mehr denkbar sein sollte. Als Folge der ersten Forderung ergibt sich, dass irgend zwei Punkte einer Geraden g immer wieder dieselbe Gerade bestimmen. Als zweite Forderung zur Konstruktion ist die Übertragbarkeit der Strecke festzusetzen. Eine Strecke AB kann auf eine Gerade g von einem ihrer Punkte P aus nach vorgeschriebener Seite nur auf eine einzige Art abgetragen werden, so dass $PQ = AB$ wird. Die Übertragung durch Zirkel oder Massstab ist ein physikalischer Vorgang; es wird dabei angenommen, dass die benutzten Instrumente bei der Übertragung keine wesentlichen Änderungen erfahren, dass alle Störungen möglichst vermieden werden. Diese Forderung der Unveränderlichkeit der Strecke bei Übertragungen bildet die wirkliche Grundlage der Euklidischen Geometrie und aus ihr lässt sich diese besondere Geometrie auf die einfachste Art ohne unzweckmässige Einengungen dieser unerlässlichen Forderung entwickeln. Denn wenn auch aus Interesse für logische Zergliederung vorerst noch Einschränkungen in der freien Verwendung der Übertragbarkeit gemacht werden, so tritt bei allen konstruktiven Überlegungen doch ihre Verwendung als völlig selbstverständlich auf und jene erkünstelten Annahmen verdecken schliesslich nur das Wesen der Geometrie der starren Körper. Es muss zwar zugegeben werden, dass, wenn von allem Materiellen abgesehen wird und wenn nur logische Zuordnungen als einzig zulässig anerkannt werden, keine Möglichkeit besteht, für die Übertragbarkeit der Strecke Anhaltspunkte zu finden. Damit verlässt man aber das Gebiet der anschaulichen Geometrie und tritt zurück in eine Metageometrie, die für die Entwicklung der euklidischen Geometrie für sich allein nicht notwendig ist. In dieser Betrachtung möchte ich in grösster Einfachheit und Klarheit nur die Forderungen aufstellen, mittelst denen eine zwanglose, freie Entwicklung der euklidischen Geometrie möglich ist, so dass in das Beweisverfahren nicht erkünstelte Schwierigkeiten eintreten, auch auf die Gefahr hin, dass die Forderung der Übertragbarkeit der Strecke als an physikalische Vorgänge sich anlehnend erklärt werden muss.

Ist die Übertragung einer Strecke AB auf g erfolgt, so dass $PQ = AB$ entstanden ist, so wird diese Forderung noch dahin erweitert, dass es denkbar ist, dass die Strecke AB selbst als solche von ihrer Stelle in der Ebene oder überhaupt im Raume weggenommen werden kann, um auf PQ so gelegt zu werden, dass alle Punkte von AB auf die Punkte von PQ fallen und dass auch umgekehrt PQ wieder zurück auf AB gelegt werden kann, dass also zwischen gleichen Strecken Deckungsgleichheit oder Kongruenz besteht $AB \cong PQ$.

Die Vermutung darf zwar nicht ausgeschlossen werden, dass es möglich wäre, dass AB bei der Übertragung auf PQ Veränderungen erfährt, z. B. etwas kürzer wird wegen irgendwelcher Einflüsse infolge der Bewegung und dass die Wirklichkeit so geheimnisvoll ist, dass bei Rückbewegung von AB nach seiner früheren Stelle es wieder die frühere Länge angenommen hat, so dass, wenn auch PQ nach dem ursprünglichen AB bewegt wird, doch wieder Kongruenz eintritt auch im Euklidischen Sinne. Die Identität von AB im Laufe der Bewegung wäre dann gar nicht nachweisbar. Von solchen Schwierigkeiten muss aber von vorneherein abgesehen werden, solche unergründbaren Änderungen in der Wirklichkeit müssen hier ausgeschaltet werden, um die einfache Euklidische Geometrie möglich zu machen, sonst muss eine nichteuklidische Geometrie im allgemeinsten Sinn daraufhin entwickelt werden.

Aus der Übertragbarkeit der Strecke folgen Addition und Subtraktion von Strecken und deren Vielfachen durch Aneinandersetzen und Wegnehmen. Dadurch entsteht eine geometrische Veranschaulichung linearer algebraischer Polynome $ma+nb$, für m und n als ganze Zahlen mit Strecken a, b.

2. **Der Kreis.** Statt den Kreis als etwas fertig Gegebenes, also Seiendes nach Euklid[1]), in seinen Erklärungen unter N. 15 anzunehmen, worauf er ihn in den ersten Aufgaben sogleich zur Anwendung bringt und sogar den ganzen Kreis als Mittel zur Abtragung von Strecken verwendet, ist nun umgekehrt die Entstehung des Kreises auf Grund der Übertragbarkeit der Strecke zu erklären. Durch einen Punkt M können in der Ebene beliebig viele Gerade gelegt werden, auf denen von M aus eine angenommene Strecke r abgetragen wird. Die Endpunkte K dieser abgetragenen Strecken bestimmen lauter Punkte, die zum Umfang eines Kreises gehören. Auf diese Entstehungsart hin können die Punkte als beliebig nahe nebeneinander entstanden gedacht werden. Die Punktreihe wird aber erst ununterbrochen vollständig dicht, wenn eine Strecke MK um ihren Anfangspunkt M in der Ebene gedreht wird, dann beschreibt der Endpunkt K eine Kreislinie. Die Drehung erscheint also damit als eine Vervollständigung der Übertragbarkeit der Strecke. Die Entstehung des Stetigen kann nicht durch einzelne Punktsetzungen, sondern nur durch eine ununterbrochene Bewegung erklärt werden. Diese wird schon bei der Entstehung der Geraden vorausgesetzt, wie das Stetige überhaupt der Anschauung entspringt. Das Begriffliche, das seinen Ursprung in der Trennung oder Teilung hat und dadurch schliesslich zum Punkte (ad. Atom) seine Zuflucht nimmt, kann erst durch eine ins Unendlichkleine fortgesetzte Zusammensetzung dem Stetigen sich nähern.

Aus der Kongruenz gleich langer Strecken folgt, dass Kreise mit

---

[1]) Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauss. 1895. S. 6.

gleichen Radien kongruent sind. Damit ist die Grundlage für alle weiteren Kongruenzsätze festgelegt.

Als weitere grundlegende Eigenschaft ist hier noch besonders hervorzuheben, dass zwei Kreise, deren Zentrale $M_1M_2 < r_1+r_2$ ist, sich in zwei Punkten schneiden. Aus der Bildung der Summe zweier Strekken ist die Bedeutung dieser Ungleichung zu erklären, woraus auch die Notwendigkeit der Schnittpunkte folgt.

3. **Das Dreieck.** Als Grundfigur für alle weiteren Konstruktionen dient das Dreieck, begrenzt von drei Strecken a, b, c als Seiten. Dabei besteht die Ungleichung $b+c>a$, d. h. in dieser Form ist das metrische Axiom aufzunehmen, dass die Strecke die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten ist. Die Grundkonstruktion ist die Zeichnung eines Dreiecks aus a, b, c durch Abtragen einer Strecke a auf einer Geraden g und durch Kreisbogen von den erhaltenen Endpunkten aus mit b, bezw. c als Radien, deren eine Schnittpunkt dazu die dritte Ecke gibt. Wird diese Konstruktion mit den nämlichen Strecken wiederholt an anderer Stelle, so entsteht ein zum zuerst entstandenen Dreieck kongruentes wegen der Kongruenz gleicher Strecken von der Länge a und von Kreisen gleicher Radien b bezw. c um die Endpunkte von a.

Damit ist der Satz gewonnen, dass Dreiecke, die in den drei Seiten übereinstimmen, kongruent sind, d. h. einander decken in den Ecken und damit auch in allen Punkten der Seiten.

Überhaupt ergibt sich Kongruenz für alle Figuren, die durch Abtragen von Strecken und Zeichnen von Kreisen in eindeutiger Weise entstehen können. Insbesondere werden also auch die übrigen Kongruenzsätze der Dreiecke bewiesen durch direktes Zurückführen auf die Kongruenz von gleich langen Strecken und von Kreisen mit gleichen Radien, ausgenommen den Fall für eine Seite, einen anliegenden und den gegenüberliegenden Winkel, wozu Parallele verwendet werden müssen.

4. **Der Winkel.** Durch Verlängerung der Seiten AB und AC des Dreiecks ABC entstehen die Schenkel, als von unbegrenzter Länge, des Winkels α mit A als Scheitel. Der Winkel wird also vorerst als Teil des bestimmt begrenzten Dreiecks aufgefasst, und kongruente Dreiecke enthalten auch kongruente Winkel. Im nämlichen Winkel α des Dreiecks ABC können aber noch beliebige Dreiecke AB_1C_1 angenommen werden mit B_1 auf AB und C_1 auf AC oder auf deren Verlängerungen. Um also α an g in P anzutragen, kann irgendeines dieser Dreiecke verwendet werden, um dazu ein kongruentes mit der Ecke A in P und einer der Seiten AB oder AC auf g zu zeichnen. Am einfachsten wählt man $AB_1=AC_1$, d. h. ein gleichschenkliges Dreieck, was auf das Abtragen einer Sehne B_1C_1 in einem Kreis mit dem Radius AB_1 führt.

Der im vorigen Abschnitt gewonnene erste Kongruenzsatz über Dreiecke ermöglicht also das Abtragen von Winkeln und damit deren Addition und Subtraktion und auch ganzzahlige Vervielfachung, und man gelangt auch sogleich zur Proportionalität zwischen Bogen und

Zentriwinkel, was aber besser an eine spätere Stelle des Lehrganges verschoben wird.

Jedoch ist es nötig, an dieser Stelle die Nebenwinkel zu erklären: durch Verlängerung des einen Schenkels von α über A hinaus, so dass zwei Nebenwinkel zusammen einen gestreckten Winkel ausmachen, zu welchem ein Halbkreis gehört.

Auch die Gleichheit der Scheitelwinkel wird hier festgestellt als Folgerung.

5. **Der rechte Winkel.** Wenn zwei Nebenwinkel einander gleich sind, werden sie als rechte Winkel bezeichnet. Die Herstellung solcher ist durch kongruente Dreiecke auszuführen in der Errichtung eines Lotes zu g in einem ihrer Punkte P. Man trägt $PA = PB$ auf g ab und zeichnet um A und B Kreisbogen gleicher Radien, die sich in C schneide, dann ist PC ein Lot zu g, das mit g gleiche Nebenwinkel und also zwei rechte Winkel bildet.

Durch diese Konstruktion und durch die frühere der Abtragung von Winkeln ist die Kongruenz aller rechten Winkel erwiesen. Dazu ist also keine besondere Forderung, ohne alle Erklärung der Entstehung wie bei Euklid A 4, nötig, noch ein besonderes indirektes Beweisverfahren.

Auch ist durch die Konstruktion des Lotes bewiesen, dass rechtwinklige Dreiecke mit gleicher Hypotenuse kongruent sind, wenn sie noch einen spitzen Winkel gleich haben. (Schluss folgt)

Familie und Gesellschaft im Erziehungswerk.

Wenn Erziehung die planmässige Einwirkung der Erwachsenen auf die Heranwachsenden darstellt, so ist damit die Frage: „Welcher Erwachsenen?“ gegeben. Uralte menschliche Gewohnheit antwortet: „Die der Eltern und der nächsten Verwandten.“ Alte Theorie behauptet: „Die der staatsbürgerlichen Gemeinschaft“. Um über die Enge der Familie im Denken und Fühlen hinaus zu wachsen, ist es notwendig, vom ersten Lebenstage an umspült zu werden von sozialem Geiste. Plato erscheint es undenkbar, dass die Familie von ihm durchtränkt sein könnte. Die Theorie zu Anfang des 19. Jahrhunderts folgt in Fichte der platonischen Auffassung. Pestalozzi aber wird nicht müde, den Müttern und Vätern ihre vornehmste Pflicht ins Gewissen zu schieben. Den Eltern, der Familie, der Wohnstube kommt die Erzieherarbeit zu. Bringen es die Verhältnisse unglücklicherweise mit sich, dass Kinder ausserhalb ihres natürlichen Kreises aufwachsen müssen, so ist die künstliche Umgebung aufzubauen auf dem „Vater- und Muttersinn“.[1]) Das Kind „muss in der Anstalt Menschen finden, die es zu lieben gereizt ist, wie es zu Hause die Eltern liebte.“ Fehlt ihm auch nur eines der Fundamente der Familienerziehung, so entsteht ein unflickbarer Schaden. Pestalozzi einerseits,

[1]) Heinrich Pestalozzi: Zweck und Plan einer Armen-Erziehungs-Anstalt.