

Zeitschrift: Schweizer Erziehungs-Rundschau : Organ für das öffentliche und private Bildungswesen der Schweiz = Revue suisse d'éducation : organe de l'enseignement et de l'éducation publics et privés en Suisse

Herausgeber: Verband Schweizerischer Privatschulen

Band: 32 (1959-1960)

Heft: 3

Artikel: Gedanken zur Psychologie der Rechenfehler

Autor: Schaffrath, Johannes Friedrich

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-851262>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 04.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Gedanken zur Psychologie der Rechenfehler

Von Johannes Friedrich Schaffrath

1. Mathematik und Psychologie

Die Frage nach den möglichen Ursachen der Rechenfehler sowie die Probleme ihrer Einschränkung und Vermeidung bewegen täglich jeden Mathematiklehrer. Leider lehnen dabei sehr häufig gerade Fachlehrer an weiterführenden Schulen die Psychologie als Ratgeberin und Helferin in der Berufspraxis ab. Dieser Kontaktmangel wird durchaus verständlich, wenn man Grundhaltung und Aufgaben eines Mathematikers mit denen eines Psychologen vergleicht. Die Welt des Mathematikers ist der Bereich der unpersönlichen Sachverhalte, der strengen logischen Denkprozesse, der *ratio*, während die Aufgaben des Psychologen in der Erfassung der persönlichen Eigenheiten, im einfühlenen Miterleben, in der *intuitio* liegen. Diese polaren Ausgangsbasen werden zuweilen noch verstärkt durch die Überzeugung, daß die Mathematik mit ihren objektiven Geistgehalten rein und klar weiterzugeben sei, daß sie ohne jede psychologische Fundierung den Schüler unmittelbar erziehe, bilde und forme, und daß auch die Unterrichtsmethode aus dem Fachlichen heraus fest vorbestimmt sei. Kommt es dann zu Fehlleistungen der Schüler, so werden als Gründe der Rechenfehler immer wieder die vorwissenschaftlichen Begriffe der Dummheit, Faulheit, Unaufmerksamkeit und Flüchtigkeit gebrandmarkt. Kein Wunder, daß so der Mathematikunterricht vereinzelt als Qual empfunden wurde und auch heute noch besonders von Mädchen nicht selten als ein «eben notwendiges Übel» bezeichnet wird.

Wo aber der Fachlehrer der Psychologie nicht ablehnend gegenübersteht, wird er zuerst die Frage stellen, ob die Psychologie und weiterhin die Pädagogik in der Lage sind, hier Abhilfe schaffen zu können. Gibt es bestimmte Fehlerarten, die bei tieferer Betrachtung psychologisch zu erfassen und nach pädagogischer Behandlung dann auszumerzen möglich sind? Der Verfasser will anhand von Beispielen aus seinen, allerdings nur bei Schülerinnen gewonnenen, zehnjährigen Unterrichtserfahrungen an Volks-, Mittel- und Frauenberufsfachschulen zu

dieser Frage nach der Psychologie der Rechenfehler Stellung nehmen.

2. Rechenfehler in psychologischer Sicht

Es ist unzweifelhaft ein Verdienst der Psychologie, die Probleme von Fehlleistungen durchleuchtet und manche Ursachen von Rechenfehlern aufgezeigt zu haben. Solche Fehlleistungen und Fehlerarten des Rechenunterrichtes in psychologischer Sicht sind zum Beispiel:

a) *Rechenfehler durch falsche Auffassung*. Zu den Bedingungen einer richtigen Auffassung gehören die apperzipierenden Vorstellungen. Sie sind das aktivierbare Wissen, das in der bisherigen Entwicklung des Auffassenden erworben wurde, auf dem das Neue aufbauen und von dem es gedeutet werden kann. Als Fehlauffassungen kann man nun die sogenannten «Apperzeptionsillusionen» bezeichnen. Dazu gehören die Vertauschungen von ähnlich geschriebenen Ziffern, wie z. B. 1 und 4 und 7, 2 und 3, 2 und 9, 3 und 5 und 8, 6 und 0 und 9. Auch manche Hörfehler gehören hierher, wie achtzehn und achtzig, zweiundachtzig und zweihundertachtzig, elf und zwölf, zwei und drei, eins und neun, ein sechstel und ein x-tel usw. Apperzeptionsillusionen hängen eng zusammen mit der Art der persönlichen Planung in Sauberkeit und Ordnung, weiterhin mit dem Problem der Aufmerksamkeit, von dem her sie als Schreib- und Hörfehler meist als Fehlerquelle gedeutet werden.

Eine weitere Fehlauffassung ist die «Verschmelzung», die zuerst von *P. Ranschburg* festgestellt wurde. Bei visueller Auffassung von Zahlen- oder Ziffernreihen, die dicht nebeneinanderstehen und eine gleiche Intensität der von ihnen ausgehenden Reize aufweisen, können gleiche, aber auch ähnliche Ziffern sich unter Umständen derart hemmen, daß sie miteinander verschmelzen, so daß entweder eine von ihnen fortfällt oder durch eine andere Ziffer ersetzt wird. Noch bei der Potenzrechnung lassen sich solche sonst nur im wesentlichen in der Grundschule auftretenden Fehler finden, wenn die

Potenz als Multiplikation gleicher Faktoren ausgeführt wird. Bei der Aufgabe $(4a)^3$ z. B. wurde das Produkt $16 \cdot 4$ aus $4 \cdot 4 \cdot 4$ nicht 64 sondern falsch 56, weil die 6 in 16 durch das mehrfache Auftreten von 4 mit 4 verschmolz. Dieser Fehler trat als einziger Rechenfehler bei 16 Potenzaufgaben einer guten 17jährigen Schülerin auf, die sich hinterher «nicht erklären konnte, wie das bei solcher leichten Aufgabe möglich war». Verschmelzungen werden in der Praxis zumeist als Mängel der Aufmerksamkeit oder Unsicherheit des Einmaleins gewertet. Sie weisen häufig starke Ähnlichkeit mit Perseverationsfehlern auf.

b) *Rechenfehler durch falsche Assoziationen.* Jede Vorstellungsreproduktion stützt sich auf die konservierende Fähigkeit des Bewußtseins, die man mit Gedächtnis bezeichnet. Das Gedächtnis hängt wiederum stark von den Verbindungen seiner Inhalte untereinander ab, den sogenannten Assoziationen. Unter falschen Assoziationen sind daher falsche Verbindungen der Bewußtseinsinhalte zu verstehen.

Solche falschen Assoziationen können zustande kommen, wenn von einem Zahlwort mehrere verschiedenartige Tendenzen zur Reproduktion ausgehen, indem sie sich gegenseitig stören. Bei mehreren Zahlen in einer Aufgabe mit gleichen Reproduktionstendenzen können sich diese gegenseitig verstärken. Über die Hälfte aller Multiplikationsfehler werden von *Hylla* auf diese Weise erklärt. 24 hat die Divisoren 2, 3, 4, 6, 8, daher können Fehler entstehen wie 8 als Quotient von $24 : 4$ oder 3 als Quotient von $24 : 6$. Die Einmaleinszahlen 42, 48, 54, 56 und 63 werden durch falsche Assoziationen am häufigsten betroffen. Beim Kürzen von Brüchen können Fehler dadurch zustande kommen, daß z. B. $\frac{24}{18}$ falsch in $\frac{4}{6}$ und dann weiter in $\frac{2}{3}$ gekürzt werden, weil die 6 in 24 und 18 steckt und so stark wird, daß sie die 3 im Nenner verdrängt. Diese falschen Assoziationen, die in der Volksschule eine große Rolle spielen, treten auch in weiterführenden Schulen besonders bei Zahlenaufgaben schwierigeren Grades und bei eingekleideten Aufgaben auf. Dabei können sich in Aufgaben mit mehreren Operationen vereinzelt sogar Komplexe von falschen Assoziationen bilden, die dem Schüler bei bestimmten Aufgabenstellungen immer wieder «einen Streich spielen».

Für nicht nur von Zahlen ausgehende falsche Assoziationen sei ein Unterrichtsbeispiel angeführt.

Aufgabe. Eine Uhr schlägt fünf. Sie braucht für die 5 Schläge 4 Sekunden. Wie lange dauert es, wenn die Uhr zehn schlägt?

Bei dieser Aufgabe wird zumeist die falsche Asso-

ziation auftreten, daß durch die doppelte Stundenzahl auch eine doppelte Zeit des Schlagens bedingt ist, also 8 Sekunden, daß hier ein gerades Verhältnis vorliegt, wie ja auch aus der Erfahrung bekannt ist, daß 10 kg einer Ware 8 DM kosten, wenn man für 5 kg dieser Waren 4 DM bezahlen muß. Welch Erstaunen, wenn als richtiges Ergebnis 9 Sekunden angegeben wird! Solche Fehler sollte man nicht als Denkfehler bezeichnen. Sie sind im Wesen etwas anderes und feuern die Schüler, als Fehlschlüsse durch falsche Assoziationen gebrandmarkt, zu weiteren Aufgaben direkt an, während sie, als «dumme Fehler» oder «Denkschwäche» herausgestellt, niederdrückend wirken.

In der Praxis sind zuweilen leider Assoziationsfehler sehr schwer von Perseverationsfehlern, von Fehlern aus der Enge des Bewußtseins und von Aufmerksamkeitsmängeln zu unterscheiden, die alle gleiche Fehlleistungen verursachen können.

c) *Rechenfehler durch Perseveration.* Unter Perseveration ist ein gewisses Beharren, Verharren, auch ein Wiederauftreten von einmal im Seelenleben aufgetretenen Bewegungsantrieben, Gefühlen oder Vorstellungen zu verstehen. Bei Ermüdung und geistiger Schwäche treten Perseverationsfehler verstärkt auf.

Hierher gehören nun die bekannten Einmaleinsfehler wie z. B. 46 als Produkt von $7 \cdot 6$, 56 als Produkt von $6 \cdot 9$ und 48 als Produkt von $7 \cdot 8$, bei denen eine Ziffer perseveriert. Ähnliche Fehler kommen auch in der Addition noch vor, wenn in größeren Rechenaufgaben als Teilrechnung die Summe 17 von $7+9$, die Summe 18 von $7+8$ und die Summe 15 von $7+5$ erhalten werden.

Aber im wesentlichen sind es doch die Einmaleinsfehler in den Punktrechnungsarten. So treten bei der Multiplikation z. B. Fehler durch Perseveration auf in der Form gedankenloser Wiederholung wie bei der Berechnung von 7708 statt 6708, als Produkt von $3354 \cdot 2$, wobei das zweite $2 \cdot 3$ auch 7 wird aus Beharrung oder Trägheit, weil beim ersten $2 \cdot 3$ von $2 \cdot 5$ eine Einheit dazukam. Bei Aufgaben wie $830504 \cdot 8$ kann man $8 \cdot 4 = 32$ und $8 \cdot 5 = 40$ gleich hinschreiben, was dann durch Perseveration bei $8 \cdot 3 = 24$ und $8 \cdot 8 = 64$ seltener zu dem falschen Produkt 64244032, häufiger aber zu 6444032 statt 6644032 führt, weil die zwei Einheiten von 24 bei 64 vergessen werden. Bei der Division findet man Fehler wie den Quotienten 23152 statt 231052 bei der Aufgabe $693156 : 3$ oder den Quotienten 1768 statt 17608, bei $35216 : 2$, weil vielleicht durch das angenehme Gefühl der Teilbarkeit von 6, 9, 3 durch 3 die Ganzheit der Aufgabe aus dem Bewußt-

sein rückt, wie hier die Übertragung der Teilbarkeit auf 15 statt auf 1.

Perseverationsfehler des kleinen Einmaleins sind auch beim Kürzen zu finden. In einer schweren Aufgabe wird oft der Bruchansatz richtig gefunden, aber wenn die Aufgabe als Ganzheit nicht mehr im Bewußtsein steht, schleichen sich in den Teilrechnungen beim Kürzen dann die zuweilen unmöglichsten Einmaleinsfehler ein. Wichtig erscheint hierbei der Hinweis von *Fettweis*, daß in solchen Fällen von Perseverationsfehlern das mechanische Wissen des Schülers irgendwie stark gefühlsbetont wird. Die vermeintliche Bequemlichkeit der Teilaufgabe schafft nach der Hauptarbeit oft ein Lustgefühl, das die Vorsicht und Kontrolle stark herabsetzt. Aufgaben, die von einer Stelle ab leicht erscheinen in der Weiterrechnung, werden so zum Schluß noch aus diesem Gefühl der Einfachheit heraus falsch bearbeitet. Es ist daher gar nicht erstaunlich, wenn häufig und lange solche Fehler sich gerade bei Schülerinnen halten, die ja im allgemeinen mehr gefühlsbetont als Schüler an Rechenaufgaben herangehen.

Weiterhin können Perseverate Schreib- und Übertragungsfehler hervorrufen. Während Fehler wie 82 statt 28, 607 statt 706 oder 66 statt 67 meist Fehlaufassungen oder Fehlassoziationen sind, stellen oft nur als Hörfehler vermutete Verwechslungen wie 317317 statt 317307 oder 55055 statt 55050 echte Perseverationsfehler dar.

Assoziations- und Perseverationsfehler können auch zusammenwirken. Als eine solche Zusammenwirkung ist der Fehler in der Dreisatz- oder Schlußrechnung bekannt, bei dem ein umgekehrtes Verhältnis nicht beachtet wird. Die Lösungsmethode des einfachen und zusammengesetzten Dreisatzes mit nur geradem Verhältnis wird hier unkritisch auch auf umgekehrte Verhältnisse übertragen aus einer vorwiegend reproduktiven Haltung heraus mit falscher Assoziation und starker Perseverationstendenz. Die Ursachen liegen dabei nach *A. Busemann* nicht nur in der Annahme einer bloßen «Perseverationstendenz», durch die einige Vorstellungen ausgezeichnet sein können, sondern haben ihren Antrieb, wie die Erfahrung immer wieder zeigt, in noch anderen Quellen. Ein Antrieb zur Perseverationstendenz kann in einer besonderen sachlichen Interessiertheit eines Schülers liegen, der einen Bewußtseinsinhalt immer wieder auftauchen läßt; er kann in einem unterdrückten Triebanspruch liegen, der sich wiederholt in gleicher Weise äußert; er kann im Lustgefühl liegen, das eine bestimmte Lieblingsmethode zum Lösen bestimmter Rechenaufgaben schafft, was bei Mädchen nicht selten auf-

tritt und den Blick für eine weit einfachere Lösungsmöglichkeit trübt. Ein Perseverat kann aber auch lediglich ein Ersatz oder «Lückenbüßer» für einen nicht gerade verfügbaren und willentlich reproduzierbaren Inhalt darstellen. Perseverate, die schließlich den Charakter von Zwangsvorstellungen haben, erscheinen im Rechenunterricht selten. Ein Beispiel aber, wie die Zahl 8 immer wieder in Fehlergebnissen als Folge von Zwangsvorstellungen perseverierte, beschreibt *E. Schneider* in seinem Werk «Psychologie der Jugendzeit», Bern 1948, Seite 298.

d) *Rechenfehler durch die Enge des Bewußtseins.* Als wesentliche Quelle vieler Rechenfehler an weiterführenden Schulen erscheint die Enge des Bewußtseins. Durch diese Enge sind jedem Menschen in einem bestimmten Augenblick immer nur wenige Vorstellungen klar und deutlich gegeben. *Wundt* unterscheidet hier Blickpunkt und Blickfeld des Bewußtseins. Was im Blickfelde steht, ist unklar, undeutlich, verschwommen. Erst gesteigerte Aufmerksamkeit rückt es in den Blickpunkt des Bewußtseins und macht es dadurch einer sachgerechten Beobachtung zugänglich. Die Aufmerksamkeit ist somit eine Vorbedingung, auf die noch genauer eingegangen werden muß. Ist nun eine Rechenaufgabe umfangreich, eine Sach- oder Textaufgabe verwickelt, verlangt eine angewandte Aufgabe mehrere rechnerische Operationen, dann faßt die Enge des Bewußtseins immer nur einen Teil ins Auge, und die Ganzheit der Aufgabe kann im Verlaufe der Ausrechnung nahezu verschwinden. Das Vergessen einer Größe, eine falsche Benennung am Schluß oder Maßverwechslungen sind häufig Folgen einer solchen mangelnden Gesamtschau, besonders dann, wenn auf Übersichtlichkeit der Anordnung, auf Kontrolle, Proben, Schätzen und auf Zwischenpausen mit Rückblick auf die Gesamtaufgabe kein Wert im Unterricht oder vom Schüler gelegt wird. Gedankenlosigkeit, Flüchtigkeit oder Dummheit sind daher manchmal Lehrervorwürfe, die nicht das Wesentliche treffen, im Gegenteil, wenn sie von Schülern vielleicht noch «geschluckt werden», so rufen sie zuweilen bei älteren Schülerinnen geradezu hemmende Widerstände bis zum offenen Trotz hervor, da die Schülerinnen sich mit Recht falsch beurteilt fühlen. Ein Hinweis auf die Enge des Bewußtseins mit ihren möglichen Fehlern, die Erkenntnis der Notwendigkeit des Nachprüfens, Schätzens, der Probe, der abschließenden Rücküberlegung sind hier weitaus besser am Platze.

e) *Psychophysisch bedingte Rechenfehler.* Daß Fehlerquellen auch in der Konstitution der Schüler

und Schülerinnen liegen können, ist wohl bekannt, nur werden manche physischen Schwierigkeiten selten rechtzeitig erkannt. Sich anmeldende Infektionskrankheiten, Konzentrationsschwäche infolge überschnellen Wachstums, verschleppte Ermüdung, Unpäßlichkeit der Mädchen und Verstimmungen haben ebenfalls Rechenfehler zur Folge. Aber auch eine ungenügende Berücksichtigung der physischen Leistungsfähigkeit kann zu Fehlern führen. Zu lange Aufgaben oder Arbeiten, zu viele Hausaufgaben und nicht zuletzt die Nichtbeachtung der Entwicklungsstadien mit ihren Umbrüchen und Sprüngen führen zu Rechnungsfehlern, für die Verständnis aufgebracht werden muß. Sie sind zum Teil weder vom Schüler noch vom Lehrer zu vermeiden. Fehler, die durch erschwerte physische Bedingungen verursacht wurden, sollten unter Umständen eine besondere Berücksichtigung finden.

Große Vorsicht erscheint allerdings bei den nervösen Kindern geboten. Als Hauptmängel dieser «Nervösen» werden heute immer wieder Zerfahrenheit, Unruhe und Konzentrationsschwäche herausgestellt. Ihre Ursachen können sehr wohl in einer schwachen Konstitution liegen, das wird ein Arzt entscheiden müssen. Sie können weiterhin durch eine Überforderung des Kindes hervorgerufen worden sein, dann ist meist das Kind den Anforderungen einer weiterführenden Schule nicht gewachsen. Die Gründe können aber auch im Fehlen der häuslichen Ruhe, im Mangel an Ausgeglichenheit des Familienlebens, in der Reizüberflutung des heutigen Lebens durch Kino, Radio, Fernsehen und Zeitschriften liegen, nicht wenig leider auch in der Tatsache, daß manche Eltern ihre Kinder ohne genügende Überwachung sich selbst überlassen. Im letzten Falle ist endlich Front zu machen gegen immer wieder versuchte Entschuldigungen von zeitbedingten Neurosenlehren, die mit psychologischen Mitteln geschickt Unfähigkeit und Unkenntnisse von Kindern zu verschleiern suchen, die bei genügender Umsicht und Erziehung im Elternhaus durchaus einzuschränken oder zu vermeiden wären. Offene Zerfahrenheit, innere und äußere Unruhe, Konzentrationsschwäche, Aufmerksamkeitsmängel und starke Ablenkbarkeit, die nicht durch ernste physische Ursachen bedingt sind, müssen auch vom Schüler als Hauptfeinde erkannt werden, weil sie nicht nur schwere Störungen des Rechen- und Mathematikunterrichtes hervorrufen, sondern durch ihre verursachten Kenntnislücken sich hier weitaus stärker auswirken als in jedem anderen Unterrichtsfach. Solche Lücken führen zwangsläufig zu Unsicherheitsgefühlen, die eine weitere emotional bedingte Fehlerquelle darstellen.

Als psychophysisch bedingte Fehlhaltung könnte man auch eine bei Schülerinnen häufiger auftretende weitere Erscheinung bezeichnen. Es gibt Fälle, in denen Schülerinnen an einer Aufgabe die Zeit für zehn «verschwenden» oder von z. B. zwölf Aufgaben nur eine bis zwei lösen, ohne daß Gründe der Unbegabung, der Unkenntnis oder des «Sich-verbeißen» vorliegen, wobei die Art des Sich-verbeißen in eine Aufgabe, bei der der Fehler meist durch falsche Assoziation oder durch Perseveration verursacht wurde, gekennzeichnet ist durch starke Strebungen wie z. B. Ehrgeiz oder durch Willenskräfte, diese Aufgabe doch noch zu lösen. Das Fehlen aber solcher Willenskräfte und Strebungen bei auffällig geringen Rechenleistungen ohne sonstige Intelligenzschwäche ist das Merkmal für Stagnationsmängel. Alles physische Geschehen von Auffassungen, Vorstellungen, Assoziationen, Reproduktionen und Gedanken läuft nicht gleichmäßig ab im «Bewußtseinsstrom», wie ihn *W. James* definierte, sondern in Wellen mit Höhen- und Tiefenpunkten. Dabei können aber auch «Stagnationen», d. h. Stockungen und Haltepunkte, auftreten, in denen der Schüler sich ratlos auf der Suche nach weiterlaufenden Bewußtseinsinhalten befindet. Solche «geistige Leere», wie sie auch vor dem Aufsagen eines gut gelernten Gedichtes auftreten kann oder in Augenblicken, wo einem «vor Staunen der Verstand stillsteht», bedarf oft nur eines kleinen Anstoßes mitmenschlichen Verstehens durch den Lehrer, um dann wieder «in Fluß zu kommen».

Als abnorme Form und Grad der die Intelligenzleistung hemmenden Unflüssigkeit psychischer Abläufe, die daher als Intelligenzdefekt zu werten sind, bezeichnet *A. Busemann* das aus bloßem Stocken des psychischen Ablaufes entstehende «Haften» oder «Kleben» an einem einzelnen Inhalt, bis erst eine Anregung von außen oder ein neuer Einfall den weiteren Ablauf der Gedanken in Gang bringt. Dieses Haften gleicht in gewisser Weise der Perseveration, wobei aber doch der Unterschied zu machen ist, daß das Haften ein Verbleiben bei einem Bewußtseinsinhalt ist, während die Perseveration ein am falschen Platz erscheinendes, die Assoziationen und den Sinnzusammenhang unterbrechendes Vorherrschen oder Wiederauftauchen bedeutet. Rechenfehler durch Nichtlösen einer Aufgabe oder auch auffallend wenige, selbst richtige Rechenlösungen können bei Schülerinnen hier ihre Ursachen haben, wobei allerdings der Unterschied von Haften und Perseveration oft schwer festzustellen ist. Die Erscheinung des Haftens konnte der Verfasser bisher nur an blutarmen und zu schnell gewachsenen Mädchen im Alter von 13 bis 16 Jahren beobachten.

f) *Emotional bedingte Rechenfehler*. Schon bei den Perseverationsfehlern wurde die große Bedeutung von Gefühlsmomenten angesprochen. Von der Vielgestaltigkeit, der Flüchtigkeit und dem Beziehungsreichtum des Gefühlslebens, die nicht nur einzeln als selbständige Erlebnisganze im Menschen wirken, sondern als Begleiterscheinungen auch die Beobachtungen, Auffassungen, Vorstellungen und das Denken beeinflussen, werden sehr viele Rechenfehler verursacht.

Da ist zum Beispiel das Bekanntheitsgefühl, das die Aufgabe leichtnimmt, ein Scheinverstehen begünstigt und so zu Rechenfehlern verleitet, die sonst nicht gemacht werden. Da ist die Angst vor einer schlechten Zensur, vor den Eltern, vor einer spöttischen Bemerkung des Lehrers, die Rechenfehler entstehen läßt. Da ist die Aufregung, die beim Verteilen der Arbeitshefte beginnt und nicht weichen will, oder die Erregung, die beim Nichtlösen einer Aufgabe entsteht und die kommenden Rechnungen überstrahlt. Da sind Unlustgefühle, Verstimmtheiten, die eine Ausrechnung begleiten und Fehler begünstigen. Da sind Verlegenheitsgefühle und Scheu, die eine falsche Antwort geben lassen. Da sind Mißtrauens- und Unsicherheitsgefühle, die selbst bei richtiger eigener Ausrechnung das falsche Ergebnis des Nachbarn abschreiben lassen.

Neben reinen Gefühlsmomenten können auch Triebe und Strebungen Fehler verursachen. *Ph. Lersch* hat in seinem Schema des Aufbaues der menschlichen Person eine große Hilfe zum Verständnis dieser Fragen und eine vorzügliche Arbeitsmöglichkeit für psychologische und methodische Probleme der Unterrichtsgestaltung geschaffen. Er sieht das psychische Strukturgefüge des Menschen, also das Ganze der seelisch-geistigen Dispositionen, als ein Gebilde aus mehreren Schichten. Aus der untersten Schicht der «Stationären Gestimmtheiten» stammen erstens die leiblichen Gefühle, Stimmungen und Affekte, die *Lersch* mit «Lebensgefühl» bezeichnet. Zweitens faßt er die Selbstwert-, Eigenmacht-, Minderwertigkeitsgefühle, die Verlegenheit, Gehemmtheit und Unsicherheit als das «Selbstgefühl» zusammen. Drittens folgen als das «Weltgefühl» die persönlichen Einstellungen wie Ernst, Nüchternheit, Optimismus und Pessimismus. Diese «Stationären Gestimmtheiten» werden überlagert von den zwei «Endothymen Prozessen», den «Strebungen» und dem «Gefühlsleben». Dabei umfassen die Strebungen alle biologischen Triebe, ihre verschiedene Antriebsstärke, ihre Konvergenz oder Divergenz und die Möglichkeiten ihrer Verwirklichung. Das Gefühlsleben aber umschließt den Gefühlsbereich mit Ärger, Langeweile,

Vergnügen, Aufregung, Furcht, Vertrauen, Mißtrauen, Schaffensfreude, Zweifel, Pflichtgefühl u. a., die Erlebnisfähig- und Erlebnisansprechbarkeit, die Einheitlichkeit und Ambivalenz sowie die Erlebnistiefe. Die «Stationären Gestimmtheiten» und die «Endothymen Prozesse» aber stellen zusammen den «Endothymen Grund» dar, der als dunkler Lebensgrund, als tragende Unterschicht in das Licht eines bewußten persönlichen Daseins hineinragt. Das Persönliche nun, der «Personelle Oberbau», wird, abgesehen von den «Mitmenschlichen Einstellungen», bestimmt durch die Vorgänge des Denkens und Wollens, nach *Lersch* des «Noetischen Habitus» und der «Willensartung», von denen noch zu sprechen sein wird.

Die Fähigkeiten des Rechnens liegen nun zweifellos im Bereich des «Personellen Oberbaues». Man trifft daher nicht selten die Meinung an, daß im Rechen- und Mathematikunterricht zur Vermeidung von Störungen und Fehlern eben alle «Gefühlsmomente» auszuschalten seien und nur der Verstand zu arbeiten habe, daß jedes Mitschwingen von Gefühlsmomenten bei Denk- und Willensakten nur ein Merkmal von kindlicher Entwicklungsstufe, erwachsener Primitivität oder aber von Unfähigkeit bis zur Dummheit hin sei. Deshalb Kampf gegen alle Einflüsse aus dem unkontrollierbaren endothymen Grund! Hier taucht aber geradezu die Gefahr einer tragischen Fehlentwicklung des Mathematikunterrichtes auf; denn eine solche Ausschaltung des endothymen Grundes ist bis zur Hochschulreife hin nicht möglich, und es erhebt sich die Frage, ob überhaupt das menschliche Denken und Wollen völlig frei von Stimmungen, Strebungen und Gefühlsregungen sein kann. Es wird daher Zeit, daß jeder Rechen- und Mathematiklehrer erkennt, daß sein Fachgebiet nicht «in lichten Höhen des Verstandes, in der kristallklaren Luft des Geistes ruht», daß das Kind nicht aus «dem Sumpf des endothymen Grundes» herausgeführt werden muß, sondern daß jedes menschliche Wesen aus der steten Gebundenheit an seine «intime Innerlichkeit» des endothymen Grundes eine Abschwächung der störenden Einflüsse und eine Stärkung der günstigen emotionalen Kräfte erfahren muß, um so seinen Weg zu einem Höhenflug des Geistes zu finden. Diese erzieherischen Aufgaben müssen nicht nur vom Lehrer erkannt und durchgeführt, sie sollen auch dem Schüler bewußt gemacht werden, damit er selbst mithelfen kann, Steine aus dem Wege zu räumen. Eine solche Ermutigungspädagogik hat dabei nichts mit weichlichem Verstehen und Alles-entschuldigen zu tun, sie kann im Gegenteil sehr sachlich durchgeführt werden.

«Diese Aufgabe kann ich nicht!» — «Ich glaube, das stimmt nicht!» — «Wie war die Formel?» — Wer kennt diese Ausbrüche nicht? Die Gegenfragen des Lehrers sollten lauten: «Hast du's schon versucht?» — «Glaube nicht, sondern schätze, prüfe oder denke!» — «Entwickle die Formel doch selbst!»

g) *Rechenfehler durch Aufmerksamkeitsmängel.* Die wichtigste Grundbedingung einer natürlichen Aktivität in der geistigen Entwicklung ist die Aufmerksamkeit. Das Wesen der Aufmerksamkeit wird dadurch bestimmt, daß sie starken Schwankungen unterworfen ist, daß sie Stufen kennt, daß sie abhängig ist von der Person nach Reife und Verfassung sowie von der Umwelt durch Außeneinflüsse. Die kindliche Aufmerksamkeit ist noch äußerst labil, fluktuierend, stark abhängig von der Natur der äußeren Reize und der Gefühlslage. Während eine freie, unwillkürliche Aufmerksamkeit nur von Interessen abgelöst wird, schafft erst eine allmähliche Erziehung die willkürliche Aufmerksamkeit in ihren zwei Grundformen: mittlere Intensität der Aufmerksamkeit für längere Zeit und hohe Konzentration der Aufmerksamkeit für kürzere Zeit.

Unter Aufmerksamkeit ist psychologisch die Einengung oder Konzentration des Bewußtseins zu verstehen, wobei gewisse Bewußtseinsinhalte in den Blickpunkt rücken, während für andere eine Hemmung eintritt. Diese Erscheinung des Auswählens, die bereits als Enge des Bewußtseins genannt wurde, sollte man in diesem Zusammenhang besser als Enge der Aufmerksamkeit bezeichnen. Nun bedarf aber dabei eine Konzentration der Aufmerksamkeit aller Kräfte des Willens. Die «Anstrengungsbereitschaft», wie Lersch es nennt, ist das innerste Element der willkürlichen Aufmerksamkeit. Während in der Herbart'schen Psychologie die Aufmerksamkeit noch als ein Urteilsakt erscheint, erkannte *Wundt* bereits ihren volitionalen Charakter. Ph. Lersch spricht in seinem «Personellen Oberbau» daher nur von der «Willensartung», unter der die innere und äußere Willenshaltung, die Entschlußfähigkeit, die Willenskraft und die Anstrengungsbereitschaft zusammengefaßt werden. Die empirische Psychologie hat ebenfalls die Bedeutung des Willensfaktors für alle seelischen Grundprozesse herausgestellt. Das Gedächtnis bewahrt nicht von allein, das Behalten-wollen ist eine Vorbedingung, und das Gelernte sitzt nur dann, wenn es in einer aktiven Zuwendung als Bewußtseinsinhalt gefaßt wird. Das aber geschieht in den Akten der Aufmerksamkeit. Aufmerksamkeit und Willen wachsen also zusammen. Bei fehlender Aufmerksamkeit muß daher

an den Willen appelliert werden, dann wird nach Comenius die Aufmerksamkeit «das Licht des Lernens».

Aufmerksamkeitsmängel sind, wie in jedem Unterricht, auch im Rechnen eine der großen Quellen für Fehler. Sie sind entwicklungsbedingt und können nur durch zwei Mittel bekämpft werden. Während, besonders in frühen Stadien, die Ausnutzung des Interesses als natürliche Aufmerksamkeit vom Lehrer angewendet werden kann, muß schon früh eine dann einsetzende Willensschulung das Kind zu bewußter, d. h. willkürlicher Aufmerksamkeit wecken und erziehen, in der Rechnen nicht mehr nur Spiel, sondern Arbeit bedeutet. Drohungen und Strafen gegen Unaufmerksamkeit sind dann schlechtere Mittel als das Bewußtmachen, daß die Unaufmerksamkeit aus mangelnden Willenskräften entsteht und Kennzeichen für einen haltlosen, willensschwachen Menschen sind, den man besser von der Unterrichtsstunde ausschließt, damit er die anderen nicht stört. Bei starken Umweltinflüssen, die den Aufmerksamkeitsgrad beeinflussen, z. B. große Hitze in den Sommermonaten bei später Vormittagsstunde, wird kein vernünftiger Lehrer volle Aufmerksamkeit verlangen. Gelingt es, einer Klasse die inneren Zusammenhänge von Aufmerksamkeit und Willen klarzumachen, dann kann man mit dieser Klasse den Stoff von sonst zwei Stunden in einer erledigen. Das große Hauptziel in jeder Stunde bleibt daher zur Gewinnung und Erhaltung der rechten Aufmerksamkeit oder auch Disziplin die innerliche Vereinigung von Lehrer und Schüler auf und um eine Sache, die durch Interesse oder geschickt zu weckende Willensbereitschaft erzielt wird. In solchem Rechenunterricht wird dann trotz trockenen Stoffes, mühevollen Erarbeitens von Neuem, gleichmäßigen Weitergehens oder trotz notwendigen Übens dennoch Frische und Lebendigkeit herrschen, weil die Anstrengungsbereitschaft nicht nur aus fremden Zwangseinflüssen, sondern auch aus eigenen inneren Antrieben getragen wird. Neben einem besseren Lernen wird so auch ein Rückgang von Rechenfehlern aus Aufmerksamkeitsmängeln erzielt.

Es muß jedoch abschließend darauf hingewiesen werden, daß der im Rechenunterricht oft situationsbedingte Folgewille des Kindes, der aus einer Sollhandlung mit fremder Initiative hervorgeht, noch nicht die höchste Stufe ist. Erst der Eigenwille, auch initiativer Wille genannt, wird wertvoll, der z. B. bei freien häuslichen Arbeiten nicht mehr situationsbedingt, sondern situationsentsprechend reagiert aus allein freien Antrieben.

h) *Noetisch bedingte Rechenfehler*. Nach den bereits aufgezeigten Fehlerquellen bleiben als wesentliche Schülerrechenfehler noch die in der Schulpraxis meist als Denkfehler bezeichneten noetisch bedingten Rechenfehler. Dabei sei gleich am Anfang betont, daß die Auffassungen, ob das Rechnen mit reinen Zahlen nur assoziativ verlaufe oder Denkakten entspreche, sich noch heute gegenüberstehen. Als Denken wird allgemein die beziehende, zielstrebige Tätigkeit des Bewußtseins verstanden, bei der, an bewußten Inhalten anknüpfend, Urteile gefällt und Schlußfolgerungen gezogen werden. *Ph. Lersch* gliedert in seinem «Personellen Oberbau» neben der «Willensartung» nun den «Noetischen Habitus» in die Abstraktions- und Urteilsfähigkeit, in die Folgerichtigkeit und Ordnung sowie in die Selbständigkeit und Beweglichkeit des Denkens. In diesem Bereich liegen die wesentlichen Fehler an weiterführenden Schulen. Zwar erfordert auch das elementarste Rechnen Denkakte, die bei einer Mechanisierung später in ihrer Verknüpfung unbewußt durchgeführt werden können, als solche Disposition aber zur Verfügung stehen müssen. Daß die aufgezeigten Prozesse des noetischen Habitus wachsen, reifen und geschult werden müssen, versteht sich von selbst. Hier hat die Denkpsychologie versucht, Erkenntnisse zu gewinnen.

Als Fehler aus mangelnder Abstraktionsfähigkeit treten neben Fehlern aus der Bruch- und Verhältnisrechnung besonders Fehler bei relativen Zahlen, Klammerfehler, Rechenfehler der Potenz-, Wurzel- und Logarithmen-Rechnung sowie die bekannten Fehler um die Null auf. Dabei ist die enge Verbindung von Zahlenrechnen mit mathematischen Problemen eine weitere Erschwerung. Ein falsches Urteil im mathematischen Bereich einer Aufgabe läßt auch die Rechenoperationen falsch enden. Bei benannten Zahlen und eingekleideten Aufgaben ist daher die Urteilsfähigkeit stark mitbestimmend. Sehr entscheidend erscheint die Erziehung zur Folgerichtigkeit und Ordnung des Denkens, die das so häufig nur oberflächliche Stückwissen, das mechanisch eingesetzt wird, vertreiben muß. Fehler wie

- die Gleichsetzung von a^3 mit $3a$,
- die Gleichsetzung von x^0 mit 0,
- die Berechnung von $x = 1$ aus $12x = 0$,
- die falsche Kürzung von $\frac{3x^2}{3x^2}$ zu 0

oder bei Potenzen mit gebrochenen Exponenten die falsche Übertragung in die Wurzelrechnung und umgekehrt wie z. B.

$$a^{\frac{5}{3}} \text{ in } \sqrt[5]{a^3} \text{ oder } \sqrt[6]{x^5} \text{ in } x^{\frac{6}{5}}$$

entstehen zumeist aus mangelnder Folgerichtigkeit

und Ordnung des Denkens, wenn sie nicht aus Gründen der Fehlerarten a bis g stammen. Der Schüler muß allerdings, um folgerichtig denken zu können, eine Kette von kontrollierenden Vorstellungen besitzen, mit deren Hilfe er mehr oder weniger bewußt auf den richtigen Weg zur Lösung findet.

Werden Normalverfahren, Formeln, Lösungswege zu schnell gegeben oder nur mechanisch ohne Regelbewußtsein angewandt, dann fehlen in der Kette der notwendigen Vorstellungen Glieder, und es kommt zu Fehlleistungen. Eine solche «Rechenkette» von Vorstellungen zu schaffen, ist die wichtigste Aufgabe des Rechenunterrichtes. Sie wird erst durch gründliches Erarbeiten, reichliches Üben und Anwenden in immer neuen Beziehungen gefestigt. Der Lehrer, der um diese Dinge weiß, wird auch in der Oberstufe bei neuem Stoff immer wieder von wenigen, ganz sicheren elementaren Gliedern der schon gelegten Rechenkette ausgehen, um schadhafte oder gerissene Glieder aufzuspüren und neu zu schmieden, denn nicht ein mechanisches Üben einer Rechenoperation, sondern ihr Ausbau in weiteren Beziehungen, Verhältnissen und von allen Seiten beleuchtet schafft erst eine interessierte Mitarbeit, indem er den Schülern die notwendige Übersicht und Gesamtschau vermittelt. Wie oft tritt viel später so ein «Aha-Erlebnis» auf, wird dem Schüler plötzlich klar, was vorher unverständlich geblieben war. Nur auf diesem Wege kann bei Schülern eine Selbständigkeit des Denkens im Rechnen erzielt werden. Die Art und Gründlichkeit der jeweiligen Denkerziehung beeinflusst entscheidend die Denkleistung einer Klasse. Die Entwicklung der Denkfähigkeit und Denkhaltung, die den Schüler zu echter Einsicht und zum Verständnis der dargebotenen Bildungsstoffe bringen, müssen vor einem großen Stoffwissen das primäre Ziel bleiben. Es stimmt heute zuweilen skeptisch, daß der Erfolg der schulischen Rechenarbeit bei großer Stofffülle im Hinblick auf die Entwicklung intellektueller Kräfte doch noch zu gering erscheint.

In diesem Zusammenhang muß auch die Frage des Gedächtnisses gesehen werden. Die alten Ansichten, eine Formel sei nur zu lernen, Lehrsätze müßten auswendig gekonnt werden, bei Nichtwissen 20mal abschreiben, trifft man immer noch einzeln an. Das Gedächtnis wurde früher als eine Art Vorratskammer angesehen, aus der alles Aufbewahrte jederzeit zu reproduzieren sei. Heute weiß man, daß jede Erinnerungsvorstellung eine subjektive Umgestaltung und freie Kombination von Eindrücken unserer Wahrnehmungen darstellt. Nachhaltiger als das mechanische Einprägen von isolierten Elementen wirken daher Auffassungen von Be-

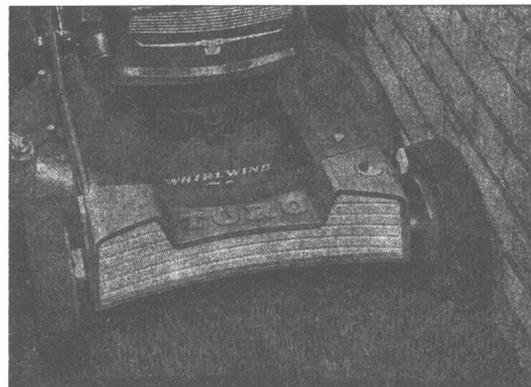
ziehungen und damit die Herstellung von Komplexbildungen. Das aber wird durch einen immer wieder rückgreifenden Unterrichtsstil erreicht. Natürlich gehören von seiten des Schülers Willenskräfte zum Mitdenken und Mittun dazu, vor allem Konzentration. Hier bremst nun wieder das leidige Übel der Konzentrationsschwäche mit ihren mannigfachen Ursachen.

Diese zu bekämpfen ist jedoch besser, als die alte Gedächtnisschulung wieder einzuführen, wie das teilweise versucht wird. Nur eine bewußte Selbsterziehung und gewonnene Selbständigkeit des Schülers hilft hier weiter. Es wird ein hohes Maß an Geduld vom Rechenlehrer zwar verlangt, wenn er immer wieder gegen die Konzentrationsschwäche und gegen das weitere Übel unserer Zeit, die Bequemlichkeit im Denken, angehen muß. Hier steht er nahezu allein im Kampf. Wie oft fließt das Denken mancher Schüler und Schülerinnen im trägen Strom des Zeitgeistes mit, akustisch leicht überplätschert von Schlagermusik, unter dem optischen Eindruck von Reklamebildern und einer Vielzahl von Illustrierten, geprägt durch bequeme Denkschablonen, die heute fertig frei Haus geliefert werden. Erscheint da der Lehrer nicht zuweilen mittelalterlich? Nur ein Heruntersteigen vom hohen Roß, ein Vermeiden von spöttischem Besserwissen, ein menschliches Helfenwollen, ein ehrliches Mitsuchen und Mitringen des Lehrers wird die Eigenkräfte des Schülers anspornen und zu eigener Denktätigkeit aufrufen können, nachdem er die Beziehungen von Denken und Anschauung, Denken und emotionalen Kräften, Denken und Willen mit den Schülern geklärt hat. Mit einer größeren Selbständigkeit des Schülers wird schließlich auch eine größere Beweglichkeit des Denkens erzielt. Diese sehr individuelle Beweglichkeit kann von einem normalen psychischen Tempo auch abweichen. Eine starke geistige Langsamkeit wird als «Bradyphrenie» bezeichnet. Die Symptome der Bradyphrenie treten um so häufiger auf, je weniger eine Denkschulung die Schüler selbständig gemacht hat. Nicht zu verwechseln ist hier eine geistige Langsamkeit mit dem «Haften oder Kleben» an einzelnen Inhalten, der Stagnation. Auch kann eine langsame Aufgabenlösung durchaus durch vorsichtiges Rechnen mit steter Bereitschaft zur Selbstkritik bei besonders schwierigen Aufgaben hervorgerufen werden. Immer wieder ist zu erkennen, daß es allgemeine Rezepte nicht gibt, sondern daß die individuellen Voraussetzungen jedes Schülers entscheidend sind.

Abschließend wird mit Recht die Frage erhoben werden müssen, ob alles Rechnen einen Denkakt

darstellt und wo in weiterführenden Schulen bei der Rechenkette angesetzt werden kann. Der Verfasser ist der Meinung, daß nach den ersten 6 Jahren Schulzeit mit normalem Rechenunterricht, für den eine zahlreiche einschlägige Literatur vorhanden ist, die Schüler bei reinen Zahlenaufgaben mit ganzen, einfach gebrochenen und zweistelligen Dezimalzahlen in den vier Grundrechnungsarten sich sicher bewegen müssen. Dabei wird mindestens im schriftlichen Rechnen ein bewußtes Denken nicht mehr notwendig sein, sondern die Aufgabe muß «wie im Schlaf» gelöst werden können. Diese Rechenteknik oder Rechenfertigkeit muß also zum Können geworden sein, das nahezu mechanisch und automatisch arbeitet, weil sich ein Regelbewußtsein gebildet hat in der Art, daß nicht mehr ein Denken an die Regel, sondern ein Denken in der Regel stattfindet. Als Musterbeispiel sind die Punktrechnungsarten in der Bruchrechnung geeignet. Bei Aufgaben wie $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{9}$ und $\frac{6}{11} : \frac{3}{5}$ werden automatisch die früher einmal gewonnenen Regeln eingesetzt: Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner, sowie, teile durch einen Bruch, indem du mit dem Kehrwert malnimmst. Wer das nicht kann, mag durchaus ein guter Denker sein, ein guter Rechner aber ist er nicht. (Schluß folgt)

TORO MOTORRASENMÄHER



schneiden so sauber längs Mauern und Hecken usw.

Das Spritzgussgehäuse aus einer Spezialaluminium-Legierung ist so gut durchdacht, dass der Rasen entlang Mauern oder Hecken sauber ausgemäht werden kann. Sogar überhängende Gräser werden durch die grosse Sog-Wirkung des Propellers erfasst und abgeschnitten. - Kein mühsames Nachputzen mit Grasschere oder Sichel. - Verlangen Sie bitte Prospekte, Referenzlisten und unverbindliche Vorführung durch



Altorfer Samen AG

Fellenbergstrasse 276, Zürich 47, Tel. 051 / 52 22 22