Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Forstwesen = Swiss foresty journal = Journal forestier suisse

Herausgeber: Schweizerischer Forstverein

Band: 55 (1904)

Heft: 8

Artikel: Ueber Stamm-Kubierungen

Autor: Zwicky, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-764198

Abstand zwischen den Stützen 5,0 m,
„ „ „ Rahmen 0,8 m.
Kosten inkl. Kultur und Nachbesserung Fr. 750.

Der Transport des Materials und Maßnahmen zur Abwendung von Gefahr für die Arbeiter haben die Anlage besonders verteuert. Der Kostenpunkt ist die Schattenseite des Versuches. Doch hat dieser in Verbindung mit der Bachverbauung seinen Zweck erreicht und den Geschiebe-Transport aus der Blasenfluh auf ein Minimum herabgesetzt.

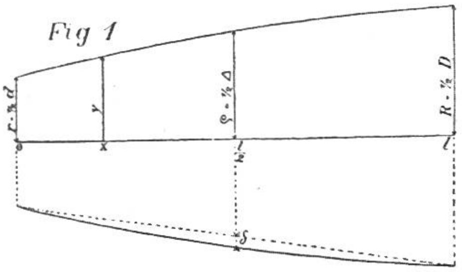
Ob ein anderes Verfahren mit weniger Aufwand zum Ziel geführt hätte, können wir nicht entscheiden. Das Flechtwerk hatte seine Dienste versagt. Von einem Rasenziegel-Belag versprachen sich die Beteiligten nicht mehr. Für Mauerwerk fehlte das geeignete Material. So griff man zur Verkleidung. Diese hat gehalten, was man unter den eigenartigen Verhältnissen dieses Falles erwartet hat.

Zürcher, Sumiswald.

Ueber Stamm-Kubierungen.

Von C. Zwicky, Professor am eidg. Polytechnikum in Zürich.

Jeder normal gewachsene Baumstamm kann bezüglich seiner Form als ein Rotationskörper aufgefaßt werden, dessen Erzeugungslinie eine flach gebogene Kurve ist. Letztere kann stets mit genügender Genauigkeit als ein Stück einer gemeinen Parabel definiert werden, deren allgemeine Gleichung lautet:



$$1) \quad y = \alpha + \beta x + \gamma \cdot x^2.$$

Der Charakter der Kurve (ob geradlinig, eingebaucht oder ausgebaucht) ist durch die drei Ordinaten (Radien) am Anfang (r), in der Mitte (ϱ) und am Ende (R) vollständig bestimmt (Fig. 1). Damit ergeben sich für die obige allgemeine Gleichung die drei speziellen Fälle:

$$r = \alpha,$$
$$\varrho = \alpha + \beta \cdot \frac{l}{2} + \gamma \cdot \frac{l^2}{4},$$
$$R = \alpha + \beta\, l + \gamma \cdot l^2,$$

woraus man für die Koeffizienten α, β und γ die Werte erhält:

$$2)\quad \begin{cases} \alpha = r = \dfrac{d}{2}, \\ \beta = \dfrac{-3r + 4\varrho - R}{l} = \dfrac{-3d + 4\triangle - D}{2l}, \\ \gamma = \dfrac{2r - 4\varrho + 2R}{l^2} = \dfrac{+d - 2\triangle + D}{l^2}, \end{cases}$$

wo d, $\triangle$ und D die den Radien r, ϱ und R entsprechenden Durchmesser bedeuten.

Für das Volumen des Rotationskörpers ergibt sich nun:

$$V = \int_0^l y^2 \cdot \pi \cdot dx = \pi \cdot \int_0^l \{ \alpha^2 + 2\alpha\beta x + (\beta^2 + 2\alpha\gamma) x^2 + 2\beta\gamma x^3 + \gamma^2 x^4 \} dx = \pi \cdot \left\{ \alpha^2 x + \alpha\beta x^2 + \frac{\beta^2 + 2\alpha\gamma}{3} x^3 + \frac{\beta\gamma}{2} x^4 + \frac{\gamma^2}{5} x^5 \right\}_0^l.$$

$$3)\quad V = \pi \cdot l \cdot \left\{ \alpha^2 + \alpha\beta l + \frac{\beta^3 + 2\alpha\gamma}{3} \cdot l^2 + \frac{\beta\gamma}{2} l^3 + \frac{\gamma^2}{5} \cdot l^4 \right\}.$$

Führt man hier für die Koeffizienten α, β, γ die oben gefundenen Werte ein, so erhält man unter Zusammenfassung der gleichartigen Glieder:

$$4)\quad \underline{V = \frac{\pi}{30} \cdot l \cdot \left\{ (d^2 + 4\triangle^2 + D^2) + (d + D) \cdot \triangle - \frac{d\,D}{2} \right\}.}$$

Dabei erinnert der Ausdruck in der ersten kleinen Klammer an die einfachste Form der Simpson'schen Formel, wie sie bei der Volumenbestimmung von Prismatoiden zur Anwendung gelangt.

In dieser allgemeinsten Volumenformel sind folgende praktisch wichtigen Körper als Spezialfälle enthalten:

a) Zylinder ($d = \triangle = D$): $V = l \cdot \dfrac{D^2\pi}{4} = l \cdot G$;

b) Kegel $\left(d = 0, \triangle = \dfrac{D}{2}\right)$: $V = l \cdot \dfrac{D^2\pi}{12} = \frac{1}{3} \cdot l \cdot G$;

c) Kegelstumpf $\left(\triangle = \dfrac{d+D}{2}\right)$: $V = \frac{1}{3} \cdot l \cdot G \cdot \left\{1 + \dfrac{d}{D} + \left(\dfrac{d}{D}\right)^2\right\}$;

d) Spindel ($d = D = 0$): $V = \frac{2}{15} \cdot l \cdot \triangle^2 \cdot \pi$

e) Faß ($d = D$): $V = l \cdot \pi \left\{ \frac{1}{20} D^2 + \frac{1}{15} D \triangle + \frac{2}{15} \triangle^2 \right\}$

Der Durchmesser $\triangle$ in der Mitte weicht stets nur wenig von dem arithmetischen Mittel der beiden Enddurchmesser ab; wir setzen daher:

5) $\triangle = \frac{1}{2}(D + d) + \delta$, wo

$\delta = 0$ für Zylinder, Kegel und Kegelstumpf,

$\delta > 0$ für ausgebauchte Stammformen,

$\delta < 0$ für eingebauchte Stammformen.

Bezeichnen wir dann den Quotienten aus den beiden Enddurchmessern mit

6) $u = \frac{d}{D}$, wo $u < 1$,

dann ergibt sich für das Volumen noch die Gleichung:

7) $$V = \frac{1}{3} \cdot l \cdot G \left\{ (1 + u + u^2) + 2(1 + u) \cdot \frac{\delta}{D} + \frac{8}{5} \cdot \left(\frac{\delta}{D}\right)^2 \right\},$$

wo $G = \frac{D^2 \pi}{4}$, die Grundfläche am dickern Ende bedeutet.

In dieser Formel entspricht der Ausdruck in der ersten kleinen Klammer dem Volumen des Kegelstumpfes, die beiden andern Glieder stellen den Einfluß der Aus- oder Einbauchung dar. Von diesen beiden letztern Gliedern ist das erste positiv oder negativ, das letzte stets positiv und relativ sehr klein, so daß es praktisch vernachlässigt werden könnte.

Für den Durchmesser 2 y an beliebiger Stelle ergibt sich nach dem frühern:

$$2y = d + \frac{x}{l}(-3d + 4\triangle - D) + \left(\frac{x}{l}\right)^2 \cdot (2d - 4\triangle + 2D^2).$$

Mit Einführung von δ erhält man, wenn man noch setzt:

$$\frac{x}{l} = k$$

8) $D_k = 2y = d + k \cdot (D - d + 4\delta) - k^2 \cdot 4\delta$

Für den Kegelstumpf ergibt sich speziell:

$D_k = d + k(D - d)$

$D_k^2 = d^2 + 2dk \cdot (D - d) + k^2 (D - d)^2$

Ebenso für den gegen die Mitte symmetrischen Querschnitt $l - x$, mit $\frac{l - x}{l} = 1 - k$

$D_{1-k}^2 = d^2 + 2d(D - d) \cdot (1 - k) + (D - d)^2 (1 - k)^2.$

Damit erhält man für die halbe Summe:

$$S = \frac{1}{2}(D_k^2 + D_{1-k}^2) = d^2 + d(D - d) \cdot (k + 1 - k) + \frac{1}{2}(D - d)^2 \left\{k^2 + (1 - k)^2\right\} = d^2 + dD - d^2 + \frac{D^2}{2} - Dd + \frac{d^2}{2} - k(D - d)^2 + k^2 \cdot (D - d)^2$$

$$S = \frac{d^2 + D^2}{2} - (D - d)^2\, k + (D - d)^2\, k^2$$

Wir wollen nun die Lage von x bezw. k so bestimmen, daß ein Zylinder mit der Grundfläche $\frac{S\,\pi}{4}$ bei gleicher Länge l mit dem Kegelstumpf gleiches Volumen erhält. Indem wir noch den Durchmesserquotienten u einführen, ergibt sich:

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{D^2 \pi}{4} (1 + u + u^2) = l \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \left\{ \frac{1 + u^2}{2} - (1 - u)^2\, k \right.$$

$$\left. + (1 - u^2)\, k^2 \right\}$$

$$\tfrac{1}{3} (1 + u + u^2) = \frac{1 + u^2}{2} - (1 - u)^2\, k + (1 - u)^2\, k^2,$$

$$2 + 2\,u + 2\,u^2 = 3 + 3\,u^2 - 6\,(1 - u)^2\, k + 6\,(1 - u)^2\, k^2,$$

$$-1 + 2\,u - u^2 = -(1 - u)^2 = -6\,(1 - u)^2\, k + 6\,(1 - u)^2\, k^2,$$

$$6\,k^2 - 6\,k + 1 = 0;$$

$$k = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{12} = \tfrac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\underline{k_1 = 0{,}211325,} \qquad \underline{k_2 = 0{,}788675} \quad (= 1 - k_1)$$

*Man erhält also das Volumen eines Kegelstumpfes genau, indem man das Mittel aus den Querschnittflächen bei $x_1 = 0{,}21 \ldots l$ und bei $x_2 = 0{,}79\; l$ mit der ganzen Länge l multipliziert.**

Da bei normalen Stammformen nicht nur beim Kegelstumpf, sondern auch bei eingebauchten und ausgebauchten Stämmen die Enddurchmesser d und D den kleinsten und den größten Durchmesser darstellen, so läßt sich vermuten, daß auch bei gekrümmten Mantellinien sich das Stammvolumen mit großer Annäherung aus zwei symmetrisch gegen die Mitte liegenden Querschnitten bestimmen läßt, indem man für diese Körper den zu diesen beiden Querschnitten gehörenden Kegelstumpf von gleicher Länge substituiert. In der Tat zeigt ein Blick auf die beiden Figuren 2 und 3, daß die Abweichungen von diesem Kegelstumpf sowohl

Fig. 2

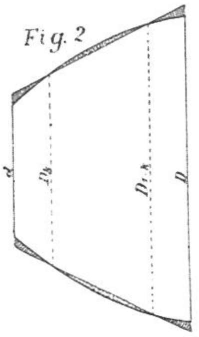
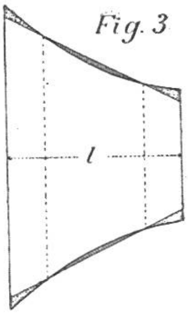


Fig. 3



* Zum gleichen Resultate gelangte auch Schiffel in seinem größern Werke: Die Kubierung von Rundholz aus zwei Durchmessern und der Länge. Von Adalbert Schiffel, k. k. Forstrat. XXVII. Heft der Mitteilungen aus dem forstl. Versuchswesen Österreichs. Wien. W. Frick, 1904.

beim eingebauchten wie beim ausgebauchten Stamme teils positiv, teils negativ sind, sich bei passender Wahl der Querschnittslagen also in ihrer Gesamtwirkung aufheben müssen.

Es mögen diese Verhältnisse an einem einfachen Zahlenbeispiel näher verfolgt werden, wobei die für den Kegelstumpf gefundenen theoretischen Werte von k und 1 — k auf die praktisch bequemern Beträge k = 0,20 und 1 — k = 0,80 abgerundet sind.

Es sei:	d^m	$\triangle^m$	D^m	δ^m
1. Kegelstumpf:	0,20	0,30	0,40	0
2. Eingebauchter Stamm:	0,20	0,25	0,40	— 0,05
3. Ausgebauchter Stamm:	0,20	0,35	0,40	+ 0,05

folglich $u = \frac{d}{D} = \frac{0,20}{0,40} = 0,50$

und $G = \frac{D^2 \pi}{4} = \frac{0,40^2 \cdot \pi}{4} = 0,125664 \cdot m^2$

Für die genauen Volumen V ergibt sich dann nach 7):

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot G \cdot l \cdot \left\{1 + u + u^2 + 2\,(1 + u) \cdot \frac{\delta}{D} + \tfrac{8}{5} \cdot \left(\frac{\delta}{D}\right)^2\right\}$$

$$= l \cdot 0,041888 \cdot \left\{1 + 0,50 + 0,25 + 2 \cdot (1 + 0,50) \cdot \frac{\delta}{0,40} + \tfrac{8}{5} \cdot \left(\frac{\delta}{0,40}\right)^2\right\}$$

1. Kegelstumpf ($\delta = 0$)

$$V_1 = l \cdot 0,041888 \cdot 1,75 \qquad = \underline{l \cdot 0,073304}$$

2. Eingebauchter Stamm: $\delta = -\,0,05, \quad \frac{\delta}{D} = -\,\frac{1}{8}$

$$V_2 = l \cdot 0,04188 \cdot \left\{1,75 - 3 \cdot \tfrac{1}{8} + \tfrac{8}{5} \cdot \tfrac{1}{64}\right\}$$
$$= l \cdot 0,04188 \cdot 1,40 \qquad = \underline{l \cdot 0,058643}$$

3. Ausgebauchter Stamm: $\delta = +\,0,05, \quad \frac{\delta}{D} = +\,\frac{1}{8}$

$$V_3 = 1 \cdot 0,04188 \cdot \left\{1,75 + 3 \cdot \tfrac{1}{8} + \tfrac{8}{5} \cdot \tfrac{1}{64}\right\}$$
$$= l \cdot 0,04188 \cdot 2,15 \qquad = \underline{l \cdot 0,090059}$$

Es verhalten sich somit:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 0,073304 : 0,058643 : 0,090059$$
$$= 1 : 0,80 : 1,23$$

Für die Durchmesser und Volumen V' der äquivalenten Kegelstumpfe erhält man nach Formel 8):

$$D_k = d + (D - d + 4\,\delta) \cdot k - 4\,\delta \cdot k^2$$
$$= 0,20 + (0,20 + 4\,\delta) \cdot k - 4\,\delta \cdot k^2$$

Mit $k = 0{,}20$ und folglich $1 - k = 0{,}80$ ergibt sich dann für die obigen drei Körper:

$$1. \begin{cases} D_{0,20} = 0{,}20 + 0{,}20 \cdot 0{,}20 = 0{,}24, & G_{0,2} = 0{,}045239 \\ D_{0,80} = 0{,}20 + 0{,}20 \cdot 0{,}80 = 0{,}36, & G_{0,8} = 0{,}101788 \end{cases}$$

$$G_{0,2} + G_{0,80} = 0{,}147027$$

Die Anwendung der allgemeinen Volumenformel:

$$9) \quad V' = \frac{l}{2} \cdot (G_k + G_{1-k})$$

auf diesen Fall gibt:

$$V_1' = \frac{l}{2} \cdot (G_{0,20} + G_{0,80}) = l \cdot 0{,}073514$$

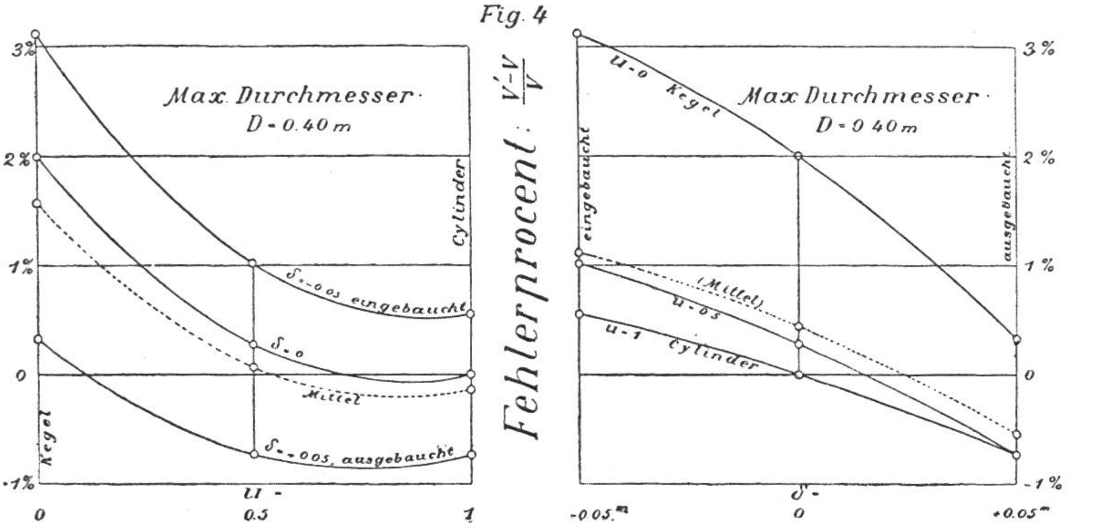
$$2. \begin{cases} D_{0,20} = 0{,}20 + (0{,}20 - 0{,}20) \cdot 0{,}20 \\ \qquad + 0{,}20 \cdot 0{,}04 = 0{,}208 & G_{0,20} = 0{,}033980 \\ D_{0,80} = 0{,}20 + (0{,}20 - 0{,}20) \cdot 0{,}80 \\ \qquad + 0{,}20 \cdot 0{,}64 = 0{,}328 & G_{0,80} = 0{,}084496 \end{cases}$$

$$V_2' = \underline{l \cdot 0{,}59238} \qquad 0{,}118476$$

$$3. \begin{cases} D_{0,20} = 0{,}20 + (0{,}20 + 0{,}20) \cdot 0{,}20 \\ \qquad - 0{,}20 \cdot 0{,}04 = 0{,}272 & G_{0,20} = 0{,}058107 \\ D_{0,80} = 0{,}20 + (0{,}20 + 0{,}20) \cdot 0{,}80 \\ \qquad - 0{,}20 \cdot 0{,}64 = 0{,}392 & G_{0,80} = 0{,}120687 \end{cases}$$

$$V_3' = \underline{l \cdot 0{,}089397} \qquad 0{,}178794$$

Fig. 4



Unter Beibehaltung der Werte $D = 0{,}40$ und $\delta = 0, -0{,}05$ und $+0{,}05$ haben wir auch noch die Rotationskörper mit $u = 0$ und $u = 1{,}0$ berechnet. Die Resultate sind in folgender Tabelle enthalten. Aus derselben, wie auch aus der graphischen Zusammenstellung der relativen Fehler $100 \cdot \frac{V' - V}{V}$ (Fig. 4) geht hervor, daß bei der Stammkubierung aus den beiden Enddurchmessern — unter Annahme der Form eines abgestumpften Kegels bei beträchtlicher tatsächlicher Ein- oder Ausbauchung — ganz bedeutende Fehler entstehen können, welche beim vollen Kreiskegel mit $+ \frac{1,00 - 0,78}{0,78} = + 28,1\,\%$ und $- \frac{1,28 - 1,00}{1,28} = - 21,9\,\%$ ihr Maximum erreichen. Bei Messung der beiden Durchmesser in $\frac{1}{5}$ und in $\frac{4}{5}$ der Länge erhält man dagegen mittelst der sehr einfachen Formel 9):

$$V' = \frac{l}{2} \cdot (G_{0,20} + G_{0,80})$$

Resultate, welche von dem wahren Volumen V auch bei stark konischer Form und auch bei erheblicher Ein- oder Ausbauchung nur sehr wenig differieren.

I. Volumen-Tabelle

$$\text{für } D = 0,40^{m};\ \delta = \triangle - \frac{D + d}{2} = \pm\, 0,05^{m}$$

$$V' = \tfrac{1}{2} \cdot l \cdot (G_{0,20} + G_{0,80})$$

№	Stammform	δ^{m}	$\frac{V}{l}$ m^2	$\frac{V}{V_1}$	$\frac{V'}{l}$ m^2	$\frac{V'-V}{l}$ m^2	$100 \cdot \frac{V'-V}{V}$
			a) u = 0, d = 0.				
1	Kegel	0	0,041888	1,00	0,042726	+ 0,000838	+ 2,00 %
2	Eingebaucht	— 0,05	0,032463	0,78	0,033477	+ 0,001014	+ 3,12 %
3	Ausgebaucht	+ 0,05	0,053407	1,28	0,053583	+ 0,000176	+ 0,33 %
	Mittel:		42586	1,02	43262	+ 676	+ 1,58 %
			b) u = 0,50, d = $\frac{1}{2}$ D.				
1	Kegelstumpf	0	0,073304	1,00	0,073514	+ 0,000210	+ 0,28 %
2	Eingebaucht	— 0,05	0,058643	0,80	0,059238	+ 0,000595	+ 1,02 %
3	Ausgebaucht	+ 0,05	0,090059	1,23	0,089397	— 0,000662	— 0,73 %
	Mittel:		74002	1,01	74050	48	+ 0,07 %
			c) u = 1,0, d = D.				
1	Zylinder	0	0,125664	1,00	0,125664	0	0,00 %
2	Eingebaucht	— 0,05	0,105767	0,845	0,106362	+ 0,000595	+ 0,56 %
3	Ausgebaucht	+ 0,05	0,147655	1,18	0,146574	— 0,001081	— 0,73 %
	Mittel:		126362	1,008	126200	— 162	— 0,13 %
			Mittelwerte aus a, b und c.				
1	Kegelstumpf	0	0,080285	1,00	0,080635	+ 0,000350	+ 0,44 %
2	Eingebaucht	— 0,05	0,065624	0,815	0,066359	+ 0,000735	+ 1,12 %
3	Ausgebaucht	+ 0,05	0,097040	1,205	0,096518	— 0,000522	— 0,54 %
	Gesamt-Mittel		80983	1,007	81171	+ 188	+ 0,23 %

Wenn dieses günstige Ergebnis im vorhergehenden auch nur für Stämme mit einem max. Durchmesser von 0,40 m nachgewiesen wurde, so läßt sich doch sofort übersehen, daß für beliebige andere Durchmesser die gleichen Beziehungen stattfinden. Denn bei gleich bleibendem Werte von u und von $\frac{\delta}{D}$ sind sowohl V wie auch V′ proportional D^2, der Quotient $\frac{V' - V}{V}$ ist daher von dem absoluten Werte von D unabhängig.

(Schluß folgt.)

Erfahrungen über Wildbachverbauungen und Aufforstungen.

Korreferat, gehalten an der Versammlung des schweizer. Forstvereins zu Schwyz am 3. August 1903 von Dr. F. Fankhauser.

(Schluß.)

Sobald man aber das Vorhandensein einer ausreichenden Bewaldung als unerläßliche Voraussetzung für den dauernden Erfolg der Verbauung anerkennt, so ist nicht abzusehen, warum stets als Regel gelten soll, erst den Verbau auszuführen und die Aufforstung nachfolgen zu lassen. Naturgemäßer wäre wohl, wenigstens dort, wo keine Gefahr im Verzug liegt, zunächst das Regime des Baches zu verbessern und erst nachdem dies geschehen, die baulichen Vorkehren in Angriff zu nehmen.

Gleichzeitig mit den beiden Arbeiten wird dagegen zu beginnen sein, wo eine rasche Verschlimmerung der mißlichen Zustände zu befürchten oder die örtlichen Verhältnisse die Erzielung eines augenblicklichen Effektes zur Sicherung von Ortschaften, Verkehrsmitteln usw. erheischen und daher ein unverzügliches Eingreifen geboten erscheint. Solche Fälle lagen z. B. vor in Lungern (Obwalden), wo der Eibach durch seine Ausbrüche den größten Teil des Dorfes bedrohte; bei den Brienzer Wildbächen, welche fortwährend die Straßen- und Bahnverbindung zwischen Brienz und Meiringen unterbrachen; an der Guppenruns bei Schwanden (Glarus), die nicht nur die nächsten Ortschaften, sondern die Straße und Bahn nach dem innern Teil des Kantons gefährdete, usw. Daß hier mit allen Mitteln, also auch bautechnischen, darauf hingearbeitet werden mußte, die bestehende Gefahr sofort abzuwenden, versteht sich wohl von selbst.