

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Forstwesen = Swiss forestry journal = Journal forestier suisse
Herausgeber: Schweizerischer Forstverein
Band: 105 (1954)
Heft: 3-4

Artikel: Das Tariffdifferenzverfahren zur Massenzuwachsermittlung
Autor: Loetsch, F.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-766655>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Das Tariffdifferenzverfahren zur Massenzuwachsermittlung

Anwendung in der forstlichen Praxis und im Versuchswesen

Von Dr. ing. F. Loetsch

Professor an der Bundesforschungsanstalt für Forst- und Holzwirtschaft in Reinbeck

(56.2)

Gliederung

I. Mathematische Grundlagen des Tariffdifferenzverfahrens

1. Die Tarifkurve
2. Steigungsfaktor der Tarifkurve
3. Die Anwendung des Steigungsfaktors der Tarifkurve zur Berechnung des laufenden Massenzuwachses

II. Die praktische Durchführung der Tariffdifferenzmethode

1. Bei ständigen an markierter Meßstelle mit kreuzweiser Millimeterklappung und Baumnumerierung aufgenommenen Versuchsflächen
2. Bei Gewinnung der Stärkezuwüchse auf dem Wege über die Stärkezuwachskurve

III. Die Fehlermöglichkeiten von Massenzuwachsberechnungen

1. Genauigkeitsprüfung der Formel $lz_v = \frac{1}{n} (V_E - V_A + N) \left(\begin{smallmatrix} \text{Vorratsdifferenz-} \\ \text{verfahren} \end{smallmatrix} \right)$
2. Genauigkeitsprüfung der Formel $lz_v = \sum_1^m z_{Di} \cdot \frac{dv_i}{dD_i} \left(\begin{smallmatrix} \text{Tariffdifferenz-} \\ \text{verfahren} \end{smallmatrix} \right)$

IV. Schlußbetrachtung

I. Mathematische Grundlagen des Tariffdifferenzverfahrens

1. Die Tarifkurve

Die Vorratsermittlung nach Tarifen mit einem Eingang hat in Europa eine große Bedeutung erhalten. In der *Schweiz* sind es die verschiedenen Silventarife, in *Frankreich* der Algan-Tarif, die Schaefferschen Tarife, in *Deutschland* die von Laer-Spieckerschen, Krennschen und Krutzsch-Loetsch'schen Tarife, die alle den gemeinsamen Grundgedanken benutzen: Das Volumen wird als Funktion des Durchmessers in Bruthöhe gekennzeichnet.

Es soll hier nicht die Frage diskutiert werden, welchen Tarifen im Einzelfall der Vorzug zu geben ist, welche Abweichungen die Tarife von der wahren Masse erwarten lassen und wie man Tarife errechnet. Ich habe mich in einer früheren Arbeit bereits eingehend mit diesen Fragen befaßt und darf daher hier darauf verweisen (4).

Wir gehen hier von der Voraussetzung aus, daß für ein zu inventarisierendes Waldobjekt eine — oder auch mehrere — Tarifkurven von der Art $v = f(D)$ gefunden und als brauchbar hinsichtlich der zu erwartenden Genauigkeit angenommen wurden. Diese Voraussetzung trifft überall dort zu, wo man in der Praxis mit irgendeinem der oben

genannten Tarife oder Tarifsyste me arbeitet oder wo man sich mit Hilfe einer selbst konstruierten bzw. einer Einheitshöhenkurve die Masse für den Einzelstamm jeder Durchmesserstufe aus einer Massentafel herleitet.

Hat man die passende Tarifkurve $v = f(D)$ oder, wie wir weiterhin auch schreiben wollen, $y = f(x)$ gefunden, so hat man zweierlei erreicht:

- a) Die für die einzelnen Durchmesser abzuleitenden Massen ergeben durch Multiplikation mit den Stammzahlen die Massen der Durchmesserklassen des Waldobjektes. Durch Addieren dieser Produkte erhält man die Gesamtmasse (bekannter Weg der Massenermittlung).
- b) Durch Differentiation der Tarifkurve erhält man ihr Steigungsmaß in der Gestalt des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$. Er gibt für den gewünschten Durchmesser x das Steigungsmaß der Tarifkurve. Multipliziert man diesen Steigungsfaktor mit der Maßeinheit des Durchmessers (z. B. 1 cm), so erhält man den laufenden Massenzuwachs für diese Maßeinheit. Hat ein Stamm z. B. den Durchmesser 30 cm, so ist $x = 30$, und $\frac{dy}{dx} \cdot 1$ cm ist der laufende Massenzuwachs in Festmetern, den der Stamm für einen Zentimeter Durchmesserzuwachs, also zwischen 29,5 und 30,5 cm, nach der Tarifkurve aufweist.

Dieser Steigungsfaktor der Tarifkurve — im folgenden auch ihr Differentialquotient genannt — ist ein entscheidendes Aufbau-element der Massenzuwachsberechnung.

2. Der Steigungsfaktor der Tarifkurve

Der mathematischen Untersuchung von Wachstumskurven haben sich viele namhafte Forscher gewidmet (H u g e r s h o f f, P e s c h e l, L e v a k o w i t s c h, M i c h a i l o w u. a. [vgl. 11]). Sie wählen eine Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$, wobei x das Alter bedeutet. Die erste Ableitung dieser Funktion $y' = f'(x)$ ist von den genannten Autoren als die Zuwachsfunktion beschrieben worden. Der naheliegende Gedanke, durch Differenzierung einer Wachstumsfunktion eine Funktion für den Zuwachs zu erhalten, ist also bereits weitgehend ausgebaut worden. In der Tarifkurve bedeutet die Variable x nicht das Alter, sondern den Brusthöhendurchmesser. Die Tarifkurve stellt somit nicht den zeitlichen Wachstumsgang dar, sondern im Zeitpunkt der Inventur einen funktionellen Zusammenhang zwischen den Brusthöhendurchmessern und Bauminhalten. Demzufolge ist ihr Steigungsfaktor der Massenzuwachs pro Maßeinheit des Durchmessers im Inventurzeitpunkt.

In Abbildung 1 habe ich zwei Tarifkurven aus zwei verschiedenen Tarifsystemen als Beispiele herausgegriffen und gezeichnet. Für ungleichaltrige Waldungen ist, wie ich in (4) aufzeigen konnte, der französische *Algan*-Tarif im allgemeinen gut passend. Ich habe ihn hier in $f(3)$ durch die Tarifreihe Nr. 13 dargestellt (entnommen aus *K n u c h e l*, 1, S. 100). Für gleichaltrige Bestände gibt die Tendenz der

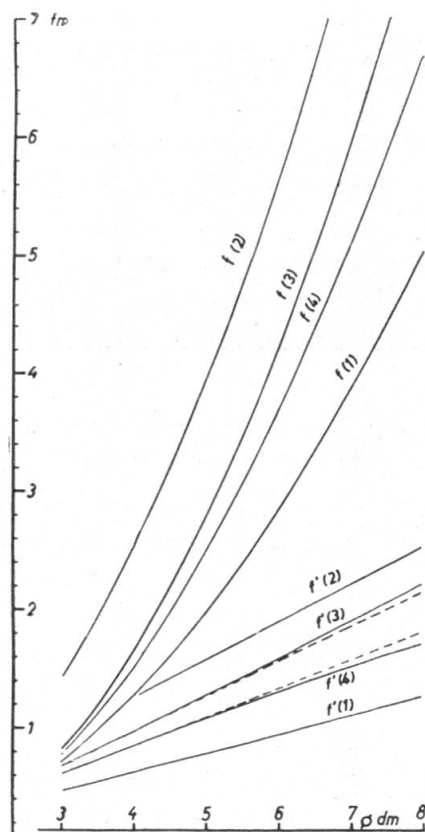


Abbildung 1

Einige Tarifkurven und ihre ersten Ableitungen

von *Laer-Spieckerschen* Tarife ein passendes Bild. Dargestellt wurde die Buchentarifreihe Nr. 60 in $f(4)$.

Um eine Differentiation dieser Tarifkurven durchzuführen, muß man vorher eine Paßfunktion für die empirisch gefundenen Tarifreihen besitzen. Der Kurvenverlauf läßt zunächst auf eine Parabel schließen. Ich wählte daher als Ausgangsfunktion eine Parabel nach der Gleichung

$y = bx^2$, wobei ich als Konstante $b = \frac{\pi}{40} = 0,0786$ nahm und den Durchmesser x in dm darstellte, weil dadurch handlichere Konstanten entstehen. Ich erhielt somit die Funktion $f(1)$

$$= 0,0786 x^2. \quad [fm; x \text{ in dm}] \quad (1)$$

Durch Verdoppelung der Konstanten erhielt ich ferner die Funktion $f(2)$

$$y = \frac{\pi}{20} x^2 \text{ oder } y = 0,157 x^2. \quad (2)$$

Der Vergleich dieser so gewonnenen Kurven mit dem *Algan*-Tarif Nr. 13 zeigt in Abbildung 1, daß die Tarife etwa in der Mitte zwischen beiden liegen, so daß die ungefähre Größe für die mittleren Durchmesser 4—6 dm mit einer Gleichung $y = \frac{\pi}{30} x^2$ einigermaßen getroffen werden würde. Die Steigungstendenz der Tarife ist jedoch eine wesentlich andere als die der beiden Parabeln.

Dies läßt vermuten, daß die Funktion einen komplizierteren Charakter besitzt. Eine Möglichkeit, die Steigung ändernd zu beeinflussen, liegt zunächst noch in der Variation des Exponenten von x . Dies führt zu Volumengleichungen von der Form $v = b \cdot D^e$. Sie werden in den USA viel benutzt. H. A. Meyer (7) gibt zum Beispiel als lokale Massenkurve für *white pine* die Funktion $V = 0,03428 \cdot D^{2,6076}$ an. Kurven dieser Art treffen jedoch nach meinen bisherigen Untersuchungen nicht in allen forstlich wichtigen Durchmesserstufen gleichzeitig das passende Steigungsmaß für die aus breiter Ausgangsbasis empirisch entstandenen europäischen Tarifreihen wie etwa von der Art der 13. *Algan*-Reihe oder BT 60 nach von Laer-Spiecker.

Bei der weiteren Suche nach einer geeigneten Funktion für Tarife mit einem Eingang hat mir eine neuere Arbeit von Michailow (10) gute Dienste geleistet. Sein Ausgangsmaterial waren 359 Fichtenstämme, deren Massen er genau bestimmte. Das mittlere Alter ist 87 Jahre mit einer Standardabweichung von $\pm 32,9$ Jahre. Das Material ist also sehr ungleichaltrig und läßt daher eine Übereinstimmung mit anderen europäischen Tarifen für ungleichaltrige Wälder vermuten. Als günstigste Probiefunktion fand er eine Gleichung von der Art $y = a + bx + cx^2 + dx^3$. Die vier Konstanten errechnete Michailow unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate und fand für sein Ausgangsmaterial die Konstanten

$$\begin{aligned} a &= +0,08564 \\ b &= -0,1894 \\ c &= +0,1424 \\ d &= +0,0005554, \end{aligned}$$

so daß die von Michailow gefundene Funktion lautet

$$y = 0,08564 - 0,1894x + 0,1424x^2 + 0,0005554x^3. \quad (3)$$

Der Vergleich der nach dieser Funktion berechneten Wertepaare mit dem *Algan*-Tarif 13 (vgl. Tabelle 1, Spalten 1 und 2) stellt in den Durchmesserbereichen 3—8 dm eine derart große Übereinstimmung

dar, daß zeichnerisch beide Kurven völlig zusammenfallen. Diese überraschend gute Übereinstimmung der Reihe 13 mit dem Untersuchungsmaterial *M i c h a i l o w s* führt übrigens zu der berechtigten Annahme, daß auch die anderen zwanzig *A l g a n*-Reihen für ungleichaltrige Wälder Jugoslawiens gut anwendbar sind.

Tabelle 1

Wertetabellen für einige Tarifikurven und ihre Steigungsfaktoren
(Vergleich zwischen Probierfunktion und Tarifreihe)

$x = d_{1,3}$ in dm	Tarifikurven				1. Ableitungen der Tarifikurven		
	Funktion (3)	Algan-Tarif Nr. 13 fm	Funktion (4)	von Laer- Spiecker Bu Nr. 60 fm	Funktion (3)	Funktion (4)	von Laer- Spiecker Bu Nr. 60 fm
Spalte	1	2	3	4	5	6	7
3	0,814	0,8	0,766	0,76	0,068	0,061	0,06
4	1,642	1,6	1,499	1,50	0,098	0,085	-0,09
5	2,768	2,7	2,469	2,48	0,128	0,108	0,11
6	4,196	4,2	3,668	3,67	0,158	0,130	0,13
7	5,928	5,9	5,072	5,07	0,188	0,151	0,15
8	7,968	7,9	6,681	6,63	0,220	0,171	0,17

Im Vergleich zur einfachen Parabelfunktion besitzt bei der *M i c h a i l o w* schen Gleichung das quadratische Glied eine Konstante von ähnlicher Dimension wie bei $f(2)$ (0,1424 gegenüber 0,157). Die Parabel nach $0,1424 x^2$ würde also nur um ein wenig unter der Funktion (2) gezeichnet werden müssen. Das positive Glied der dritten Potenz mit der sehr kleinen Konstanten wirkt sich bei den kleinen Durchmessern fast noch gar nicht aus, führt aber bei stärkeren Durchmessern zu einer wesentlich schnelleren Steigung der Kurve als die Parabel. Das negative lineare Glied beeinflußt umgekehrt: es drückt die Kurve in den schwachen Durchmessern herunter und verliert bei ansteigenden Durchmessern zunehmend an Einfluß. Die kleine freie Konstante wirkt sich nur bei den schwachen Durchmessern aus und fällt bei den auf der Zeichnung aufgetragenen Durchmessern ab 30 cm nicht mehr nennenswert ins Gewicht.

Durch entsprechende Variierung der vier Konstanten dürfte es mit Hilfe der Gleichung $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ nunmehr möglich sein, auch für die andern Reihen des *A l g a n*-Tarifs, ferner für Schweizer Plenterwaldtarife u. a. die entsprechenden Funktionen für den Anwendungsbereich zwischen $x = 0$ bis $x = 10$ zu finden.

Die Tarife im Altersklassenwald haben gemäß der viel flacher verlaufenden Höhenkurve im Gegensatz zu der eben beschriebenen Funktion $f(3)$ eine gänzlich andersgeartete Steigungstendenz. Wie schon der

Vergleich der Bu T 60 etwa zur Parabel $f(2)$ augenscheinlich zeigt, ist die Steigung in den stärkeren Durchmessern nicht größer, sondern vielmehr kleiner als die von $f(2)$. Diese Beobachtung führte zu der Überlegung, auch hierfür dieselbe Ausgangsfunktion $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ zu benutzen, jedoch nicht nur die Konstante b , sondern auch d negativ zu wählen.

Hieraus ergab sich durch Probieren die Gleichung

$$y = 0,10564 - 0,1894x + 0,1424x^2 - 0,002x^3. \quad (4)$$

Aus den Spalten 3 und 4 der Tabelle 1 geht hervor, daß diese Gleichung mit der Tarifreihe Bu T 60 ebenfalls eine recht gute Übereinstimmung zeigt, so daß sie als Ausgangsfunktion für die Differentiation der Bu T 60 benutzt werden kann.

Die Differentialquotienten unserer vier Funktionen von Abbildung 1 errechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0,157x \\ f'(2) &= 0,314x \\ f'(3) &= -0,1894 + 0,2848x + 0,00167x^2 \\ f'(4) &= -0,1894 + 0,2848x - 0,006x^2. \end{aligned}$$

Die beiden Differentialquotienten der Parabeln stellen sich somit als Gerade dar (vgl. Abbildung 1), von denen diejenige von $f(1)$ forstlich insofern Bedeutung besitzt, als sie den Steigungsfaktor bei der Berechnung des Kreisflächenzuwachses angibt.

$f'(3)$ steigt in den größeren Durchmessern stärker an als die Gerade (gestrichelte Linie), während $f'(4)$ demgegenüber abfällt.

Von rein mathematischem Interesse ist der in Abbildung 2 dargestellte Kurvenverlauf von $f(3)$ und $f(4)$ im ersten Quadranten. Während $f(3)$ rasch zum $+\infty$ strebt und demzufolge auch die erste Ableitung $f'(3)$ stetig steigende Tendenz zeigt, hat $f(4)$ nach Erreichung eines Extrempunktes [x -Wert dafür durch Nullsetzung von $f'(4)$ errechenbar] fallende Tendenz und verläuft genau wie ihre erste Ableitung nach $-\infty$. Von forstlich praktischer Bedeutung ist nur der kleine schraffierte Teil der Zeichnung am Achsenkreuz, der in Abbildung 1 vergrößert dargestellt wurde.

Diese ersten Ableitungen der Tarifkurven ermöglichen es, für jedes gewünschte x den Steigungsfaktor mathematisch exakt mit jeder gewünschten Stellenzahl zu erreichen. Dies ergibt Werttabellen, wie sie als Beispiele in Spalten 5 und 6 der Tabelle 1 aufgezeigt worden sind. Da x in der Formel in dm angegeben wurde, sind die Werte durch Versetzen des Kommas um eine Stelle nach links in Massenzuwächse für einen Zentimeter laufenden Durchmesserzuwachses umgewandelt worden. Für Tarifreihen wie zum Beispiel die schweizerischen und französischen Tarife, die nur auf $1/10$ fm genau angegeben sind, ist zur

Berechnung des Steigungsfaktors mit ausreichender Stellenzahl nach dem Komma der Weg über die Differentiation einer geeigneten Paßfunktion empfehlenswert.

Wie man auch ohne Kenntnis der Paßfunktion für Tariffreihen mit $1/_{100}$ fm-Angaben zu ausreichend genauen Steigungsfaktoren kommen kann, habe ich in einer früheren Veröffentlichung bereits ausgeführt (5). Dieser Weg, den H. A. Meyer (7, 8) Interpolationsmethode nennt, ist aus Tabelle 2 ersichtlich.

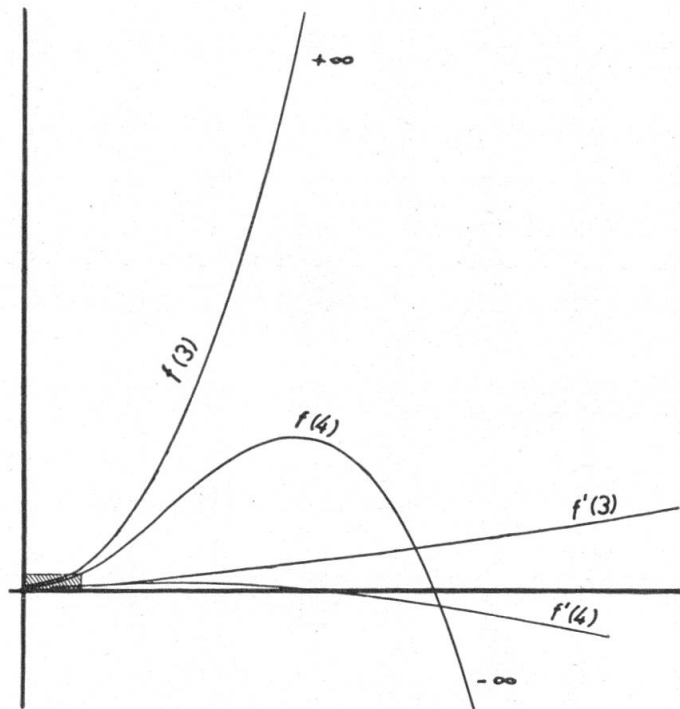


Abbildung 2

Tariffkurvenverlauf vom Typ des Plenterwaldes $f(3)$ und des Altersklassenwaldes $f(4)$

Man bildet die Differenzen zwischen den einzelnen Gliedern der Tariffreihe (Spalte 2) und teilt sie durch das Durchmesserintervall, hier durch 2 (Spalte 3). Um den gesuchten Steigungsfaktor für die mittleren Durchmesser der Stufen (Spalte 4) zu erhalten, bildet man die arithmetischen Mittel zwischen den benachbarten Gliedern der Reihe aus Spalte 3.

Auf diesem Wege über die Tariffdifferenzen wurde die gesamte Tariffreihe Bu T 60 berechnet und in Spalte 7 der Tabelle 1 den Differentialquotienten der $f(4)$ (Spalte 6) vergleichend gegenübergestellt.

Für zwei Stellen nach dem Komma ist eine völlige Übereinstimmung des praktischen Näherungsverfahrens mit der ersten Ableitung der Paßfunktion festzustellen.

Tabelle 2

v. Laer-Spiecker Bu T 60				
$\varnothing$	Vol. in fm	Tariffdiff.	Tariffdiff.: Durchmesser- intervall	Steigungsfaktor in fm
	1	2	3	4
20	0,28			
22	0,36	0,08	0,04	0,04
24	0,44	0,08	0,04	0,045
26	0,54	0,10	0,05	0,05
28	0,64	0,10	0,05	0,055
30	0,76	0,12	0,06	0,063
32	0,89	0,13	0,065	0,065
34	1,02	0,13	0,065	0,07
36	1,17	0,15	0,075	0,078
38	1,33	0,16	0,08	0,083
40	1,50	0,17	0,085	

Es muß noch die Frage untersucht werden, wieweit sich dieses Näherungsverfahren mathematisch rechtfertigen läßt.

Für alle Tarifreihen, deren Differentialquotienten durch Gerade dargestellt werden [zum Beispiel $f'(1)$ und $f'(2)$ von Abbildung 1], ist das Tariffdifferenzverfahren mathematisch völlig exakt. Der Beweis ist einfach am Beispiel einer Parabel als Stammfunktion vom Charakter $y = k \cdot x^2$ herzuleiten.

$$y' = 2 kx \quad (5)$$

ist der gesuchte Differentialquotient.

Die Tariffdifferenzmethode verfährt folgendermaßen: Die beiden voneinander abzuziehenden Glieder der Reihe, die von dem zu untersuchenden x gleich weit um $\pm q$ im Durchmesser abweichen, lauten

$$y_1 = k(x + q)^2$$

$$y_2 = k(x - q)^2$$

Das Durchmesserintervall beträgt somit $2 q$. Der Steigungsfaktor ist demnach

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - y_2}{2q} &= \frac{k}{2q} \left[(x + q)^2 - (x - q)^2 \right] \\ &= \frac{k}{2q} (x^2 + 2qx + q^2 - x^2 + 2qx - q^2) \\ &= \frac{k}{2q} \cdot 4qx = 2kx. \end{aligned}$$

Der Steigungsfaktor ist somit gleich dem in (5) errechneten Differentialquotienten.

Bei Stammfunktionen vom Charakter

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

wie wir sie den Funktionen $f(3)$ und $f(4)$ zugrunde legten, wird, wie man schon augenscheinlich durch die Krümmung der ersten Ableitung feststellen kann, die Gleichheit nicht mehr bestehen. Der Differentialquotient ist

$$y' = b + 2cx + 3dx^2 \quad (6)$$

Analog dem Vorgehen bei der Parabel wird als Durchmesserintervall wiederum $2q$ angenommen. Es ergibt sich der Steigungsfaktor bei dem Tariffdifferenzverfahren wiederum nach

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - y_2}{2q} &= \frac{1}{2q} \left[a + b(x + q) + c(x + q)^2 + d(x + q)^3 - a - b(x - q) - c(x - q)^2 - d(x - q)^3 \right] \\ &= \frac{1}{2q} \left[b[(x + q) - (x - q)] + c[(x + q)^2 - (x - q)^2] + d[(x + q)^3 - (x - q)^3] \right] \\ &= \frac{1}{2q} \left[2qb + 4qcx + d(6qx^2 + 2q^3) \right] \\ &= b + 2cx + d(3x^2 + q^2) \\ &= b + 2cx + 3dx^2 + q^2d. \end{aligned} \quad (7)$$

Im Vergleich zum Differentialquotienten (6) sehen wir nunmehr, daß die Tariffdifferenzmethode ihren Steigungsfaktor um das Glied q^2d zu groß ermittelt. Bei der Stammfunktion für Bu T 60 [$f(4)$] betrug $d = -0,002$. x war für diese Funktion in dm zugrunde gelegt, infolgedessen muß q auch in diesem Maß angegeben werden. In der Tabelle 2 betrug das Durchmesserintervall 0,2 dm, $2q$ ist demnach 0,1. Somit ist für diesen Fall

$$q^2d = -0,01 \cdot 0,002 = -0,00002 \text{ fm.}$$

Der Unterschied des durch das Näherungsverfahren der Tariffdifferenzmethode erhaltenen Steigungsfaktors zum Differentialquotienten liegt also weit unterhalb der vertretbaren Abrundungsgenauigkeit des Tarifs von Laer-Spiecker und kann deshalb vernachlässigt werden. Ist der Tarif im 5-cm-Intervall angegeben (z. B. Kluppfestmetertarif nach Krutzsch-Loetsch [4]), so würde unter Zugrundelegung derselben Konstante sich die Abweichung wie folgt errechnen:

$$q^2d = -(0,25)^2 \cdot 0,002 = -0,000125 \text{ fm.}$$

Auch in diesem Falle würde, selbst wenn der Steigungsfaktor auf drei Stellen nach dem Komma angegeben werden soll, der kleine syste-

matische Fehler noch so gering sein, daß er nicht ins Gewicht fällt. Selbst wenn sich die Konstante d noch steigern würde, wie es zum Beispiel für die Fichtentarife erwartet werden dürfte, so wird sie doch die Grenze von $-0,006$ kaum überschreiten. Auch dann spielt bei dem 5-cm-Intervall die Abweichung der Tariffdifferenzmethode vom Differentialquotienten bei den Tarifen nach von Laer-Spiecker und dem Kluppfestmetertarif nach Krutzsch-Loetsch keine Rolle.

Die in Abbildung 3 dargestellten Steigungsfaktoren der Bu-Tarife nach von Laer-Spiecker können somit praktisch den Differentialquotienten gleichgesetzt werden.

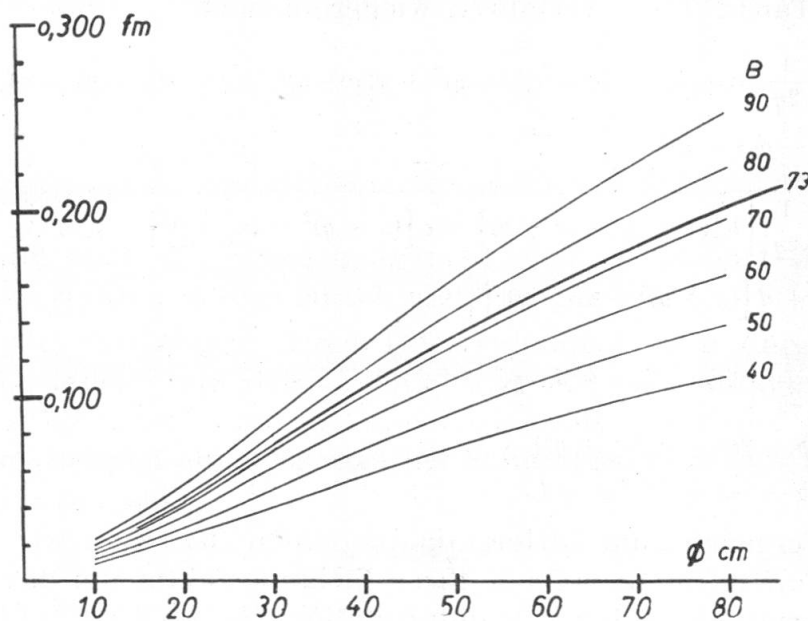


Abbildung 3

Die Steigungsfaktoren der Buchentarifreihen nach v. Laer-Spiecker

3. Die Anwendung des Steigungsfaktors der Tarife zur Berechnung des laufenden Massenzuwachses

Wenn der Steigungsfaktor eines Baumes (= laufender Massenzuwachs bei jedem gewünschten Durchmesser für 1 cm laufenden Durchmesserzuwachs) bekannt ist, so ist der erste und entscheidende Schritt für den gesuchten laufenden *jährlichen* Massenzuwachs bereits getan. Man braucht jetzt nur noch den laufenden jährlichen Durchmesserzuwachs mit Rinde z_D zu ermitteln. Auf die hierfür anzuwendenden Methoden werde ich im Abschnitt II noch näher eingehen.

Kenne ich z_D , so lautet die Formel für den laufenden jährlichen Massenzuwachs eines Baumes

$$l_{z_{v_i}} = z_{D_i} \cdot \frac{dv_i}{dD_i}, \quad (8)$$

wobei der Steigungsfaktor in der Form des Differentialquotienten unter Benutzung des Zeichens d geschrieben und die Multiplikation mit 1 cm weggelassen wird, weil sie einflußlos ist, sobald D in cm angegeben ist.

Für das gesamte Kollektiv eines Waldes aus m Bäumen, für die die gleiche Tariffreihe als passend gefunden wurde, beträgt der laufende jährliche Massenzuwachs zum Zeitpunkt der Inventur dann

$$lz_v = \sum_1^m z_{D_i} \cdot \frac{dv_i}{dD_i} \quad (9)$$

Betrachten wir nun die Formel (8) unter Zugrundelegung der Periode, die zur Bestimmung des laufenden jährlichen Durchmesserzuwachses benutzt wurde. Als Symbole sollen gelten für Enddurchmesser D_E , für Anfangsdurchmesser D_A , Zahl der Jahrringe in der Periode n .

Für die folgende Überlegung genügt zunächst die Betrachtung des aus einer Periode gewonnenen laufenden jährlichen Kreisflächenzuwachses eines Baumes. Er ist die Differenz der Kreisflächen g geteilt durch die Anzahl der Jahre der Periode.

$$z_g = \frac{g_E - g_A}{n} = \frac{\pi}{4n} (D_E^2 - D_A^2). \quad (10)$$

Nach Formel (8) berechnet sich derselbe Kreisflächenzuwachs nach der Tariffdifferenzmethode aus

$$z_g = z_D \cdot \frac{dg}{dD}. \quad (11)$$

Führt man in diese Formel die Symbole für Anfangs- und Enddurchmesser der Periode ein, so ergibt sich für

$$z_D = \frac{D_E - D_A}{n}.$$

Der Differentialquotient der Funktion

$$g = \frac{D^2}{4} \cdot \pi \text{ ist } \frac{dg}{dD} = \frac{\pi}{2} \cdot D.$$

Für D wählen wir zunächst den Mittendurchmesser der Periode $\frac{D_E + D_A}{2}$ und erhalten demnach

$$\frac{dg}{dD} = \frac{\pi}{4} \cdot (D_E + D_A) \quad (12)$$

Die nunmehr gefundenen Werte für z_D und den Differentialquotienten, in (11) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}
z_g &= \frac{D_E - D_A}{n} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (D_E + D_A) \\
&= \frac{\pi}{4n} \cdot (D_E^2 - D_A^2).
\end{aligned}$$

Wir sehen die Übereinstimmung mit (10) und können, wie zu erwarten war, folgern, daß die Tariffdifferenzmethode bei der Wahl des Periodenmittendurchmessers genau denselben Zuwachs für den Einzelstamm ergibt wie die bisher übliche Berechnungsart nach $\frac{g_E - g_A}{n}$.

Diese Verhältnisse ändern sich etwas, wenn man den in der forstlichen Praxis, zum Beispiel bei der Bohrspanprobe, leichter erhältlichen Enddurchmesser D_E wählt.

Der Differentialquotient lautet nunmehr

$$\frac{dg}{dD} = \frac{\pi}{2} \cdot D_E \quad (13)$$

und z_g nach (11) ist

$$\begin{aligned}
z_g &= \frac{D_E - D_A}{n} \cdot \frac{\pi}{2} D_E \\
&= \frac{\pi}{2n} (D_E^2 - D_E \cdot D_A).
\end{aligned} \quad (14)$$

Da der unter (13) gefundene Wert augenscheinlich größer als der bei (12) errechnete ist, bilden wir zur Beurteilung des Unterschiedes die Differenz der Funktion $f(14) - f(10)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\text{Diff.} &= \frac{\pi}{2n} \cdot (D_E^2 - D_E \cdot D_A) - \frac{\pi}{4n} (D_E^2 - D_A^2) \\
&= \frac{\pi}{4n} \cdot D_E^2 + \frac{\pi}{4n} \cdot D_A^2 - \frac{2\pi}{4n} \cdot D_E \cdot D_A \\
&= \frac{\pi}{4n} \cdot (D_E^2 + D_A^2 - 2D_E \cdot D_A) \\
&= \frac{\pi}{4n} \cdot (D_E - D_A)^2 \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot n \left(\frac{D_E - D_A}{n} \right)^2 \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot n \cdot z_D^2.
\end{aligned} \quad (15)$$

Aus dieser Formel (15) ersehen wir, daß der zwischen der Benutzung der Periodenenddurchmesser und der Periodenmittendurchmesser bestehende Unterschied bei der Anwendung der Tariffdifferenzmethode (hier Kreisflächenzuwüchse) direkt proportional der Konstanten $\frac{\pi}{4}$, der

Jahresanzahl der Periode und dem Quadrate des durchschnittlichen jährlichen Durchmesserzuwachses der Periode ist. Wie sich diese Verhältnisse zahlenmäßig auswirken, wird aus Tabelle 3 ersichtlich. Die vom Durchmesser unabhängigen Unterschiede nach (15) sind für zehn- und fünfjährige Perioden sowie für z_D von 0,1 bis 0,8 cm in Spalte 2 errechnet. In den Spalten 4, 6 und 8 sind diese Differenzen in Prozenten der entsprechenden Kreisflächenzuwüchse für die Durchmesser 25, 50 und 75 cm zum Ausdruck gebracht worden. Man sieht daraus, daß mit stärker werdendem Durchmesser der relative Unterschied rasch abnimmt. Er steigt innerhalb der Durchmesserklassen mit steigendem z_D und fällt bei Abnahme der Jahresanzahl der Periode. Die große Praxis, die mit fünf- bis zehnjährigen Perioden, mittleren Zuwüchsen von 0,2 bis 0,4 cm und mittleren Durchmessern von 30 bis 50 cm arbeitet, hat daher einen Unterschied im Rahmen von 1 bis 5 % zu erwarten.

Tabelle 3

Übersicht über die Unterschiede der Kreisflächenzuwüchse berechnet mit der Tariffdifferenzmethode nach Periodenend- bzw. -mittendurchmesser

n Spalte	z_D cm	$\frac{\pi}{4} \cdot n \cdot (z_D)^2$ cm ²	Laufender jährlicher Kreisflächenzuwachs nach $\frac{dgi}{dDi} \cdot z_D$ bei					
			D=25 cm	Sp. 2 in % v. Sp. 3	D=50 cm	Sp. 2 in % v. Sp. 5	D=75 cm	Sp. 2 in % v. Sp. 7
10	0,1	0,079	3,93	2	7,85	1	11,78	0,7
10	0,2	0,314	7,86	4	15,7	2	23,8	1,3
10	0,3	0,706	11,7	6	23,5	3	35,4	2,0
10	0,4	1,26	15,7	8	31,4	4	47,2	2,7
10	0,5	1,97	19,6	10	39,2	5	58,8	3,3
↓ 10	↓ 0,8	↓ 5,03	↓ 31,4	↓ 16	↓ 62,7	↓ 8	↓ 94,1	↓ 5,4
5	0,1	0,039	3,93	1	7,85	0,5	11,78	0,35
5	0,2	0,157	7,86	2	15,7	1	23,8	0,65
↓ 5	↓ 0,8	↓ 2,51	↓ 31,4	↓ 8	↓ 62,7	↓ 4	↓ 94,1	↓ 2,67

Um die Frage zu beantworten, welcher von diesen beiden Wegen der empfehlenswertere ist, muß zunächst der Begriff der *Zuwachspotenz*, den K r u t z s c h - L o e t s c h bereits 1938 einführten, näher erläutert werden. Sie stellt die im Zeitpunkt der Inventur in einem Baum bzw. der Summe von Bäumen (= Holzvorrat) ruhende Zuwachsmöglichkeit bei Annahme eines durchschnittlichen Klimaeinflusses dar (vgl. L o e t s c h , 5). Sie errechnet sich gemäß Formel (9) aus dem Produkt Steigungsfaktor mal laufenden jährlichen Durchmesserzu-

wachs bei dem Durchmesser, den der Baum im Inventurjahr hat, also dem Enddurchmesser.

Wählt man den Periodenmittendurchmesser, so erhält man die Zuwachspotenz, die der Baum vor $\frac{n}{2}$ Jahren gehabt hat, nicht aber diejenige, die er im Inventurjahr selbst hat. Es ist somit zweifellos klarer und vor allem auch bei der Zuwachsinventur der Praxis wesentlich arbeitersparend, grundsätzlich den Durchmesser im Inventurjahr zu nehmen. Bei dem Vergleich einer Serie aufeinanderfolgender Zuwachsinventuren, bei dem man ein Sinken oder Steigen der Zuwachsleistung feststellen und beurteilen will, ist es vor allen Dingen wichtig, daß stets nach der gleichen Methodik gearbeitet worden ist.

Stellen wir nun zum Schluß der theoretischen Ausführungen die bisher in der sog. Kontrollmethode gebrauchte Zuwachsberechnung nach der Vorratsdifferenzmethode derjenigen nach der Tariffdifferenzmethode gegenüber. Die bekannte Formel der Kontrollmethode, die sowohl in der schweizerischen wie in der süddeutschen Praxis als auch in der wissenschaftlichen Auswertung von ständigen Probeflächen zum Beispiel der forstlichen Versuchsanstalten zur Anwendung gelangt, lautet

$$lz_v = \frac{V_E - V_A + N}{n},$$

oder unter Einführung der Symbole für die Stammzahl, die im Endvorrat = m und bei der Nutzung der Periode = e sein sollen,

$$lz_v = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_1^m v_{E_i} - \sum_1^{m+e} v_{A_i} + \sum_1^e v_{N_i} \right). \quad (16)$$

Die Formel der Tariffdifferenzmethode dagegen lautet, wie in (9) bereits angegeben,

$$lz_v = \sum_1^m z_{D_i} \cdot \frac{dv_{E_i}}{dD_{E_i}}.$$

Wie ich oben zeigen konnte, liefern beide Formeln unter zwei Voraussetzungen gleiche Resultate:

- a) wenn in der abgelaufenen Periode keine Nutzung vorgenommen wurde,
- b) wenn bei der Tariffdifferenzmethode der Periodenmittendurchmesser zugrunde gelegt wurde.

Die erste Voraussetzung trifft jedoch in der Praxis nur in seltenen Fällen zu, sondern es ist die Regel, daß Ernten stattgefunden haben. In allen diesen Fällen unterscheiden sich beide Methoden grundsätzlich. Die Formel (16) ergibt rückblickend den geleisteten Zuwachs der untersuchten Waldfläche während der Periode, während die Formel (9) den

laufenden Zuwachs der im Inventurjahr vorgefundenen Bäume errechnet. Je größer die Anzahl e der geernteten Stämme ist, um so kleiner wird die Zuwachspotenz nach (9) werden. Bei Formel (16) dagegen wird

die Ernte im Glied $\sum_1^e v_{N_i}$ zum Zuwachs geschlagen. Ist e klein gewesen,

so ist der Endvorrat $\sum_1^m v_{E_i}$ entsprechend groß, ist e hoch gewesen, ist

der Endvorrat niedrig. Ein Auf und Ab der Zahl e spielt daher für den nach (16) errechneten laufenden Zuwachs keine Rolle. Es wirkt sich nur der sog. «entgangene» Zuwachs aus, der um so schwächer ins Gewicht fällt, je kürzer der Zeitpunkt der Ernte vom Inventurjahr entfernt ist.

An einem Beispiel können diese Verhältnisse leicht aufgezeigt werden.

In Tabelle 4 sind die Inventurdaten eines in sechs Inventuren auf 53 Jahre zurück zu verfolgenden norddeutschen Buchenlichtwuchsbestandes angegeben. Die Durchmesser-messungen sind mit Millimeterkluppe an markierter Meßstelle erfolgt. Die Höhenmessungen sind mit der für einen forstlichen Versuch nötigen größtmöglichen Genauigkeit durchgeführt worden. Die Spalten 3, 4 und 6 enthalten die Durchmesser der Kreisflächenmittelmstämmen sowie ihre Höhen und die Stammzahl je ha. Spalte 5 gibt die Nummer der Buchentarifreihe nach von L a e r - S p i e c k e r (3) an, die sich aus diesen Angaben finden läßt. Die Spalten 10 und 13 enthalten für die Ernte der rückliegenden Periode dieselben Inventurdaten wie die Spalten 3 bis 6 für den verbliebenen Vorrat. In den Spalten 7 und 14 sind Vorräte und Ernten gemäß der nach der jeweiligen Höhenmessung gefundenen Tarifreihe ermittelt. In den Spalten 8 und 15 sind, um eine einheitliche Ausgangsbasis für Vergleiche zu erhalten, die Massen nach einer Tarifreihe (B 73) errechnet. Auf Grund der Werte von Spalten 8 und 15 wurden in Spalte 17 nach der Formel $Iz_v = \frac{V_E - V_A + N}{n}$ die laufenden Massenzuwüchse

gefunden. Spalte 20 gibt die Massenzuwüchse nach der Tariffdifferenzmethode [Formel (9)] an, die als Stammfunktion ebenfalls durchgehend die Tarifreihe B 73 haben. In Abbildung 4 sind diese Spalten 17 und 20 der Tabelle 4 graphisch dargestellt. Da sämtliche Fehlermöglichkeiten dieser beiden durch zwei verschiedene Methoden gefundenen Massenzuwachsreihen gleichsinnig sind, können die Unterschiede beider Reihen als rein methodisch bedingt gewertet werden. Über die Folgerungen aus der Betrachtung der Spalten 7, 14, 16, 18 und 19 wird im Abschnitt IV später noch gesprochen werden.

Betrachten wir in Abbildung 4 zunächst das Jahr 1932, welchem laut Tabelle 4, Spalten 13 bis 15, eine erntefreie Periode von sieben Jahren vorausgeht. Da bei der Tariffdifferenzmethode der Perioden-

Tabelle 4

Inventurdaten einer mit Millimeterkluppe und markierter Meßstelle aufgenommenen 150jährigen Buchenlichtwuchsversuchsfläche. In Spalten 16 bis 20 Vergleich von Massenzuwachszahlen, die nach verschiedenen Methoden aus diesem Material errechnet wurden

In- ventur- jahr	Peri- oden- länge	Verbliebener Vorrat							Zu- schläge bei $\sqrt{E}$ in %	Durch Ernte entnommener Vorrat					Laufender jährlicher Massen- zuwachs in fm je ha und Jahr					
		Kreisflächen- Mittelstamm		Tarif- reihe Nr.	Stamm- zahl je ha	Derbholz in fm je ha		Mittl. Ø		Mittl. Höhe	Tarif- reihe Nr.	Stamm- zahl je ha	Derbholz in fm je ha und Jahr		Nach Formel 16			nach Formel 9		
		Ø in cm	Höhe in m			nach er- mittelter Tarif- reihe	durch- gehend nach Tarif- reihe 73						nach er- mittelter Tarif- reihe	durch- gehend nach Tarif- reihe 73	gem. Sp. 7 u. 14	gem. Sp. 8 u. 15 sowie Sp. 9	gem. Sp. 7 u. 15		gem. Sp. 8 u. 15	gem. Sp. 7 u. 15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1898	—	34,0	27,2	73	205	258,95	258,95	2,0	36,4	26,8	69	25	2,87	3,08	8,14	8,86	9,41	8,38	8,55	
1910	12	39,9	28,0	72	180	322,05	328,15													
1924	14	44,8	29,0	73	140	332,40	332,40	1,8	43,9	28,9	73	40	6,71	6,71	7,20	6,76	7,19	5,48	5,48	
1932	7	48,0	29,2	72	140	379,90	386,50	0,8							6,79	7,73	8,19	7,87	8,00	
1941	9	52,6	30,0	74	135	460,50	454,75	0,9	38,1	27,8	72	5	0,89	0,91	9,85	8,49	8,95	8,86	8,72	
1941	10,75	57,1	33,3	82	120	529,45	471,70	0,9	56,9	32,5	80	15	5,75	5,23	12,16	6,82	7,20	7,44	6,53	

endwert und nicht der Mittenwert genommen wurde, so fällt Kurve 2 in diesem Jahre nicht ganz mit Kurve 1 zusammen, sondern liegt um einige Prozente (hier 4 %) über dieser [vgl. Übereinstimmung mit Ergebnissen der Formel (15)]. Im Jahre 1941 ist nur eine sehr geringe Ernte der vorangegangenen Periode zu verzeichnen, demzufolge liegt auch hier Kurve 2 noch über Kurve 1 (diesmal nur noch um 3 %). In

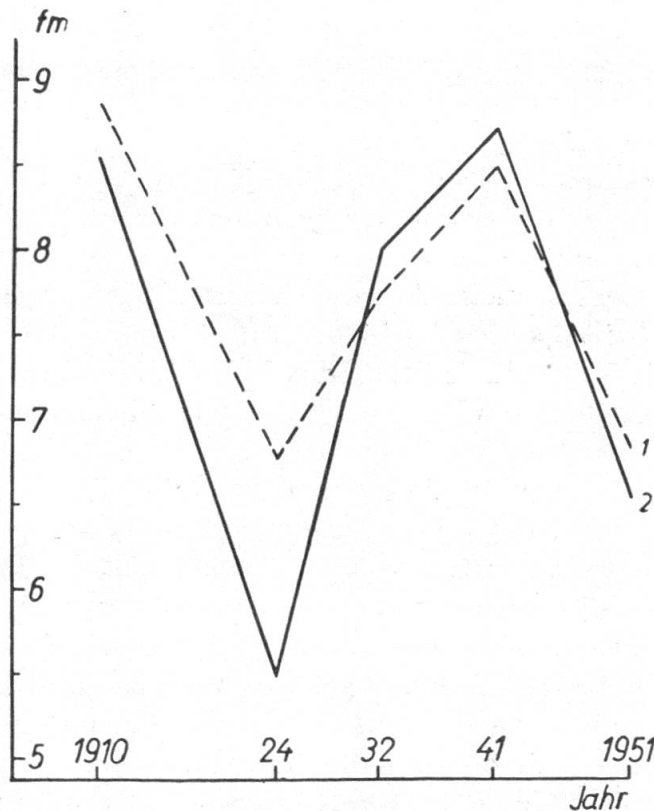


Abbildung 4

Vergleich zwischen den nach der Formel $lz_v = \frac{1}{n} (V_E - V_A + N)$ (Kurve Nr. 1) und der Tariffdifferenzmethode (Kurve Nr. 2) errechneten Massenzuwüchsen

den andern drei Inventurjahren liegt Kurve 2 unter 1, weil durch ins Gewicht fallende Ernten die Anzahl der Zuwachsträger — im Jahre 1924 erheblich — vermindert wurde. Der gleichsinnige Verlauf beider Kurven (Fallen bis 1924, Steigen bis 1944, Fallen bis 1951) wird im wesentlichen durch das Verhalten des Durchmesserzuwachses innerhalb der Perioden beeinflusst, wie aus Tabelle 5 hervorgeht.

Tabelle 5

Inventurjahr	1910	1924	1932	1941	1951
mittlerer z_D in cm	0,453	0,328	0,444	0,464	0,368

Je höher der Ernteeingriff und damit die Wegnahme von Zuwachsträgern ist, um so akzentuierter schwankt die Kurve 2. Sie gibt damit sowohl das Vermindern der Zuwachsleistung als auch das nachfolgende Erholen (1932, 1941) treffender wieder als Kurve 1.

Überhaupt nicht tritt nach Formel (16) die forstlich wichtigste Frage in Erscheinung, ob bei der Ernte gute oder schlechte Zuwachsträger genutzt sind. Bei Formel (9) hingegen wirkt sich dies sofort aus: Eine Ernte von gleicher Masse hinterläßt beim verbleibenden Bestand eine höhere Zuwachspotenz, wenn nur schlechte Zuwachsträger genutzt sind, und läßt sie niedriger werden, wenn gute Zuwachsträger der Axt zum Opfer fielen.

Zusammenfassend ergibt sich somit, daß die Formel (16) die Nutzung, also gerade die Größe, die in intensiver forstlicher Wirtschaft durch «Zuwachs» und «Vorrat» beurteilt werden soll, mit zur Ausrechnung des Zuwachses braucht. Auf die sich hierdurch ergebenden großen praktischen Schwierigkeiten ist in der Literatur oft genug hingewiesen worden. Auf die sich hinsichtlich der Genauigkeit bei den Methoden ergebenden entscheidenden Fragen werden wir im folgenden noch näher eingehen.

Die Tariffdifferenzmethode nach (9) benötigt die Nutzung nicht zur Errechnung der Zuwachspotenz. Sie liefert bereits bei der Erstinventur neben dem Vorrat eine Angabe seiner Zuwachspotenz. Beim kritischen Vergleich von Inventurserien kann nunmehr die Ernte als unabhängiger und gleichwertiger Beurteilungsfaktor der Wirtschaft zu den beiden andern Faktoren Vorrat und Zuwachs hinzutreten und ist nicht mehr, wie bei den Verfahren nach Formel (16), ein Baustein zur Errechnung einer Zuwachszahl, mit deren Hilfe man dann wieder versucht, eben dieselben Ernteeingriffe als leistungssteigernd oder -mindernd in bezug auf den Vorrat zu beurteilen.

II. Die praktische Durchführung der Tariffdifferenzmethode

1. Bei ständigen, an markierter Meßstelle mit kreuzweiser Millimeterklappung und Baumnumerierung aufgenommenen Versuchsflächen

In Tabelle 6 sind von einer ständigen Versuchsfläche diejenigen Inventurergebnisse zusammengestellt worden, die zur Zuwachsberechnung benötigt werden. Es handelt sich um das Inventurjahr 1932 desselben Bestandes, der in Tabelle 4 in seiner Entwicklung dargestellt worden ist. Der Periodenanfang liegt im Jahre 1924, die Periodenlänge n beträgt somit sieben Jahre. Aus der Spalte 1 ist ersichtlich, daß die Bäume, wie im Versuchswesen üblich, numeriert sind. Spalten 2 und 3 ergeben die Durchmesser in mm für 1924 (D_A) und 1932 (D_E). In den Spalten 4 und 5 sind die Massen stammweise aufgeführt, die sich unter Zugrundelegung der für beide Jahre angewandten Tarifreihe B 73

nach von Laer-Spiecker (3) ergeben. Die Subtraktion der Summe aller Anfangsmassen von der Summe aller Endmassen, geteilt durch die Periodenlänge, ergibt den laufenden jährlichen Zuwachs von 7,73 fm je Jahr und ha. Da die Fläche 0,2 ha groß ist, mußten hierbei die aufsummierten Einzelvorräte noch mit 5 multipliziert werden, um die Werte je ha zu erhalten. Wie aus der Tabelle 4 zu entnehmen ist, war in der Periode 1924—1932 keine Ernte angefallen, so daß bei der Anwendung von Formel (16) $N = 0$ einzusetzen war.

In dieser Weise werden zurzeit im forstlichen Versuchswesen die laufenden Zuwächse sowohl in der Kreisfläche als auch in der Masse berechnet, wobei jedoch für die Massenberechnung meist nicht ein Einheitstarif, sondern über Höhenkurve und Massentafel ein Spezialtarif zwischen Brusthöhendurchmesser und Masse ermittelt wird. Es liegt außerhalb des Rahmens dieser Arbeit, zu entscheiden, welches dieser beiden Massenermittlungsverfahren für das Versuchswesen das zweckmäßigere ist. Die vorliegende Untersuchung gilt vielmehr der methodischen Darlegung der Tariffdifferenzmethode. Um deren Resultate mit denen bisheriger Methoden vergleichsfähig zu machen, wurden als gleiche Ausgangsbasis für beide Verfahren von Laer-Spieckersche Tarifreihen gewählt. Derselbe Vergleich hätte auch mit durch das Massentafelverfahren gewonnenen Unterlagen durchgeführt werden können.

In den Spalten 6 und 11 der Tabelle 6 erfolgt die eigentliche Zuwachsberechnung nach der Tariffdifferenzmethode, wobei die Spalten 7, 8 und 9 nach dem Periodenmittendurchmesser und die Spalten 7, 10 und 11 nach dem Periodenenddurchmesser durchgeführt worden sind. Da man sich sowohl in der Wissenschaft als auch in der Praxis selbstverständlich nur mit einem dieser beiden Verfahren begnügt, so würde die praktische Zuwachsberechnung nach der Tariffdifferenzmethode im Versuchswesen nur die Spalten 1, 2, 3, 7, 10 und 11 enthalten. Die Spalte 7 ist der für jeden Einzelbaum errechnete laufende jährliche Stärkezuwachs, gebildet durch die durch 7 geteilte Differenz $D_E - D_A$. Spalten 6 und 10 sind die Steigungsfaktoren der Tarifreihe B 73. Bei praktischer Anwendung der Tariffdifferenzmethode sowohl im Versuchswesen als auch in der großen Praxis werden diese Steigungsfaktoren selbstverständlich nicht von Fall zu Fall neu errechnet, sondern liegen genau wie die Tarife selbst in Tabellenform vor. Während die Spalte 8 als Bezugswerte den Periodenmittendurchmesser $\frac{D_A + D_E}{2}$ gemäß Spalte 6 benutzt, liegt dem Steigungsfaktor von Spalte 10 als Bezugswert der Periodenenddurchmesser D_E zugrunde. Die Spalten 9 und 11 stellen den laufenden jährlichen Massenzuwachs der Einzelstämme dar und errechnen sich durch Multiplikation von Steigungsfaktor und Durchmesserzuwachs gemäß der Formel (9).

Tabelle 6

Zuwachsberechnung des Jahres 1932 von dem in Tabelle 4 dargestellten Buchenlichtwuchsbestande (Größe der ständigen Versuchsfläche = 0,2 ha)

Zuwachsberechnung nach $l_z = \frac{V_E - V_A}{n}$; $n = 7$					Zuwachsberechnung nach Tariffdifferenzmethode					
Baum Nr.	Durchmesser m. R.		Vorrat nach Tarif- reihe B 73		Periodenmitt- durchmesser $\frac{D_A + D_E}{2}$	mit Periodenmittendurchmesser			mit Periodenenddurchmesser	
	D_A cm	D_E cm	V_A fm	V_E fm		$Z_D = \frac{D_E - D_A}{n}$ in cm	Steigungsfaktoren von B 73 für $\varnothing$ von Sp. 6 in fm	l_z in fm (Sp. 7 · Sp. 8)	Steigungsfaktoren von B 73 für $\varnothing$ von Sp. 3 in fm	l_z in fm (Sp. 7 · Sp. 10)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
15	34,8	36,5	1,33	1,49	35,7	0,24	0,092	0,02	0,095	0,02
38	35,8	38,9	1,43	1,72	37,4	44	097	04	102	04
23	36,0	39,4	1,45	1,77	37,7	49	098	05	104	05
35	38,2	41,5	1,65	2,00	39,9	47	105	05	110	05
36	39,0	42,4	1,73	2,09	40,7	49	107	05	112	05
4	40,0	43,3	1,84	2,19	41,7	47	110	05	114	05
37	41,0	43,5	1,94	2,21	42,3	36	112	04	115	04
26	42,1	42,8	2,06	2,14	42,5	10	112	01	113	01
41	41,4	44,2	1,98	2,30	42,8	40	113	05	116	05
2	41,3	44,5	1,97	2,33	42,9	46	113	05	117	05
16	41,8	44,1	2,03	2,28	43,0	33	114	04	116	04
34	42,1	43,9	2,06	2,26	43,0	26	114	03	116	03

22	42,2	44,0	2,07	2,27	43,1	26	114	03	116	03
29	42,4	46,3	2,09	2,55	44,4	56	117	07	122	07
18	43,6	47,3	2,23	2,68	45,5	53	120	06	124	07
42	44,9	47,6	2,38	2,72	46,3	39	122	05	125	05
9	45,4	48,2	2,44	2,80	46,8	40	123	05	127	05
24	46,0	48,4	2,52	2,82	47,2	34	124	04	127	04
32	45,9	48,7	2,50	2,86	47,3	40	124	05	128	05
6	48,0	50,9	2,76	3,15	49,5	41	130	05	133	06
13	48,0	51,9	2,76	3,28	50,0	56	131	07	136	08
12	48,8	52,0	2,87	3,30	50,4	46	132	06	136	06
10	49,1	52,5	2,92	3,36	50,8	49	133	07	138	07
3	49,7	53,2	2,99	3,47	51,5	50	135	07	140	07
27	51,1	54,8	3,18	3,70	53,0	53	139	07	144	08
25	52,4	56,4	3,35	3,93	54,4	57	143	08	148	09
31	54,2	59,3	3,61	4,36	56,8	73	149	11	155	11
7	59,2	64,9	4,34	5,27	62,1	81	162	13	169	14
28 (Sa. Stammzahl auf 0,2 ha) 140 (Stammzahl je ha) $l_{zv} = \frac{386,5 - 332,4}{7} = 7,73 \text{ fm}$			66,48 je ha: 332,40	77,30 je ha: 386,50		mittl. zD 0,445	mittl. Steig.f. 0,121	1,54 je ha: 7,70	mittl. Steig.f. 0,125	1,60 je ha: 8,00 fm

Die Addition der Spalten 9 und 11 ergibt den laufenden jährlichen Massenzuwachs der Versuchsfläche und mit 5 multipliziert den laufenden jährlichen Massenzuwachs je ha. Er errechnete sich mit 7,70 fm für den Periodenmittendurchmesser. Nach den Ausführungen unter I. müßte dieser Wert mit jenem der Formel (16) (7,73 fm) übereinstimmen. Die geringe Abweichung von 0,03 fm/ha ist durch Abrundungsdifferenzen zu erklären. Die Aufsummierung von Spalte 11 ergibt 8 fm/ha Zuwachs. Die Anwendung des Periodenenddurchmessers ergibt somit 4 % mehr als jene des Periodenmittendurchmessers. Die Gründe hierfür sind unter I., 3 ausführlich dargestellt worden.

Die Tariffdifferenzmethode zur Berechnung des laufenden Massenzuwachses zeigt gegenüber der bisherigen Form der Zuwachsberechnung im Versuchswesen nach der Formel (16) folgende grundsätzliche Unterschiede:

- a) Von der Inventur am Periodenanfang werden nur noch die Durchmesser gebraucht, um den laufenden Durchmesserzuwachs zu errechnen. Da die Durchmesserermittlung mit Millimeterkluppe und markierter Meßstelle die mit den geringsten Fehlern behaftete forstliche Messung im Versuchswesen ist, so wird von der zurückliegenden Inventur nur der am besten fundierte Teil benutzt.
- b) Anfangsvorräte V_A und Ernte N werden zur Zuwachsberechnung nicht mehr herangezogen. Ernteverbuchung und Vorratsdifferenz $V_E - V_A$ sind im Versuchswesen als sehr störend empfundene, große Fehlerquellen für die Zuwachsberechnung bekannt. Die Tariffdifferenzmethode schaltet diese Fehler aus.

Im III. Abschnitt werden wir uns noch eingehend mit der Genauigkeitsbetrachtung zu befassen haben. Es schält sich jedoch schon jetzt bei dieser vergleichenden Betrachtung die Erkenntnis heraus, daß die Tariffdifferenzmethode bei sehr einfacher Handhabung im Versuchswesen zweifellos besser fundierte Massenzuwachsergebnisse ergeben kann

als die bisherige Form der Berechnung über $l_{zv} = \frac{V_E - V_A + N}{n}$

2. Bei Gewinnung von z_D auf dem Wege über die Stärkezuwachskurve

Für Zuwachsinventuren in der großen Praxis wird die Gewinnung von z_D auf dem Wege über die Stärkezuwachskurve, die sich meist in Form einer Geraden widerspiegelt, durchgeführt. Die Stärkezuwachsgerade drückt die Beziehungen zwischen dem Durchmesser in Brusthöhe und dem laufenden Durchmesserzuwachs aus. Liegen von dem aufzunehmenden Waldobjekt am Periodenanfang und am Periodenende brauchbare Kluppungen vor (diesmal jedoch ohne Baumnumerierung) und wird die Ernte zuverlässig stehend gekluppt, so kann das von Prodan beschriebene Differenzenverfahren (13, S. 201 ff.) zur Gewinnung der Stärkezuwachskurve angewendet werden. Diese Voraus-

setzungen werden für die Praxis jedoch nur in wenigen Fällen erfüllbar sein. Daher bleibt die Bohrspanprobenahme das für die Praxis brauchbarste Werkzeug für die Ermittlung der Stärkezuwachskurve.

Die Bohrspanprobe unterliegt als ein Stichprobenverfahren den Gesetzen der stochastischen Mathematik. Es würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen, wenn ich hier die grundlegenden Fragen dieses Problemkreises näher behandeln würde. Da ich in meiner Arbeit «Massenzuwachsermittlung durch Bohrspanproben unter Anwendung mathematisch-statistischer Gesetze» (5) erst kürzlich dieses Thema ausführlich besprochen habe, darf ich deswegen auf diese Arbeit verweisen. Im folgenden möchte ich daher lediglich den praktischen Gang der Bohrspanprobenahme sowie der Ausrechnung der Stärkezuwachsgeraden und ihres Fehlerrahmens behandeln.

In Tabelle 7 ist die Errechnung der Stärkezuwachsgeraden mit Hilfe der einfachen linearen Regression durchgeführt worden. Das Beispiel bezieht sich auf einen 70jährigen Kiefernlichtwuchsbestand der Stiftsforst Bassum. Die Bohrspanprobenahme muß nach streng objektivem Grundsatz durchgeführt werden. Für die Praxis ist am besten die gleichmäßig systematische Verteilung der Proben über die Gesamtfläche geeignet. In unserem Beispiel wurden an 94 Stämmen die Bohrspäne sowie die zugeordneten Durchmesser mit Rinde gewonnen. Die Errechnung des laufenden jährlichen Durchmesserzuwachses erfolgte durch Mittelung einer Periode (in unserem Falle zehn Jahre). Diese Auswertung der Bohrspäne kann mit für die Praxis genügender Genauigkeit gleich im Walde vorgenommen werden, wie amerikanische Untersuchungen nachweisen. Die Bestätigungen dieser Untersuchungen sind für Mitteleuropa meines Wissens noch nicht durchgeführt worden und liegen daher im Plan der von der Forschungsstelle für Holzvorratsinventur zu erledigenden Arbeiten. Größere Zentralstellen (zum Beispiel Forsteinrichtungsämter, Versuchsanstalten u. a.) werden zur exakten Auswertung der Bohrspäne das schwedische Bohrspanauswertungsgerät von E k l u n d vorziehen, mit welchem auch die hier vorliegenden Bohrspäne ausgewertet worden sind. Trägt man auf Millimeterpapier alle ermittelten Werte mit Durchmesser in Brusthöhe als Abszissen und den Stärkezuwüchsen ohne Rinde als Ordinaten ein, so ergibt sich ein Punktschwarm (vgl. Abbildung 5). Die Freihandausgleichung dieses Punktschwarms ist nicht zu empfehlen. Es ist vielmehr zweckmäßig, hierzu die Methode der einfachen linearen Regression anzuwenden, deren Errechnung ich in Tabelle 7 als Beispiel angeführt habe. Die hierfür verwendeten Formeln, zum Beispiel auch von H. A. M e y e r (7, 8 und 9) benutzt, sowie der Gang der Rechnung sind aus der Tabelle ersichtlich. Das Ergebnis der Rechnung ist die ausgeglichene Reihe der Wertepaare (Stärkezuwachs und Durchmesser), die für jedes gewünschte x — in unserem Falle für die Mittenwerte von 5-cm-Durchmesserstufen

Tabelle 7

Einfache lineare Regression
 $(y = a + bx)$

x = Brusthöhendurchmesser m. R.
 y = jährlicher Durchmesserzuwachs o. R.
 w = Anzahl je Klasse (Gewicht)

Sp. 1	2	3	4	5	6	7	8
x	$Zd = 2 \cdot Zr$ y	w	wx	wx^2	wy	wxy	wy^2
23	0,448	2	46	1 058	0,896	20,608	0,401 408
25	454	6	150	3 750	2,724	68,100	1,236 696
26	393	6	156	4 056	2,358	61,308	0,926 694
27	534	4	108	2 916	2,136	57,672	1,140 624
28	443	6	168	4 704	2,658	74,424	1,177 494
29	457	7	203	5 887	3,199	92,771	1,461 943
30	526	9	270	8 100	4,734	142,020	2,490 084
31	476	8	248	7 688	3,808	118,048	1,812 608
32	533	7	224	7 168	3,731	119,392	1,988 623
33	595	8	264	8 712	4,760	157,080	2,832 200
34	557	4	136	4 624	2,228	75,752	1,240 996
35	612	8	280	9 800	4,896	171,360	2,996 352
36	528	7	252	9 072	3,696	133,056	1,951 488
37	492	1	37	1 369	0,492	18,204	0,242 064
38	853	3	114	4 332	2,559	97,242	2,182 827
40	569	5	200	8 000	2,845	113,800	1,618 805
41	700	2	82	3 362	1,400	57,400	0,980 000
42	894	1	42	1 764	0,894	37,548	0,799 236
$P = 18$							
Sa.		94	2 980	96 362	50,014	1 615,785	27,480 142

$$b = \frac{\sum wxy - \bar{y} \sum wx}{\sum wx^2 - \bar{x} \sum wx} = 0,016 001$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 0,0248$$

$$s_{xy} = \sqrt{\frac{\sum wy^2 - a \sum wy - b \sum wxy}{P - 2}} = \pm 0,155$$

$$s_{xy} \text{ in } \% \text{ von } \bar{y} (= V_K) = 29,1$$

Ausgeglichene y -Werte
für entsprechende x -Werte:

a +	bx	= y	(bei x)
0,0248	0,3600	0,385	22,5
	4400	465	27,5
	5200	545	32,5
	6000	625	37,5
	6800	705	42,5
	7600	785	47,5

I	Sp. 6 : Sp. 3 ($= \bar{y}$)	=	0,532 063
II	I · Sp. 4	=	1 585,547 740
III	Sp. 7 — II	=	30,237 260
IV	Sp. 4 : Sp. 3 ($= \bar{x}$)	=	31,702 127
V	IV · Sp. 4	=	94 472,338 460
VI	Sp. 5 — V	=	1 889,661 540
VII	III : VI ($= b$)	=	0,016 001
VIII	VII · IV	=	0,507 266
IX	I — VIII ($= a$)	=	0,024 797

Prüfung:

VII · Sp. 5	=	1 541,888 362
plus IX · Sp. 4	+	73,895 060
= Sp. 7	=	1 615,783 422

X	IX · Sp. 6	=	1,240 197
XI	VII · Sp. 7	=	25,854 176
XII	Sp. 8 — X — XI	=	0,385 769
XIII	XII : (P — 2)	=	0,024 111
XIV	$\sqrt{\text{XIII}} (= s_{xy})$	=	0,155

Bezeichnung des Kollektivs:

70j. Ki-Lichtwuchsbestand

Inventur: 1950

— ausgerechnet werden können. Diese Wertetabelle ergibt die in Abbildung 5 dargestellte Stärkezuwachsgerade. Durch die Rechnung erhält man ferner einen mittleren Variationskoeffizienten (29,1 ‰), der nach der bekannten Formel $S\text{‰} = \frac{t \cdot s\text{‰}}{\sqrt{P}}$ die Grundlage für die Fehlerrahmenberechnung des Gesamtzuwachses gibt; in unserem Falle errechnet sich der mittlere Fehler der Stärkezuwachsgeraden mit $S\text{‰} = \frac{29,1}{\sqrt{94}} = \pm 3\text{‰}$.

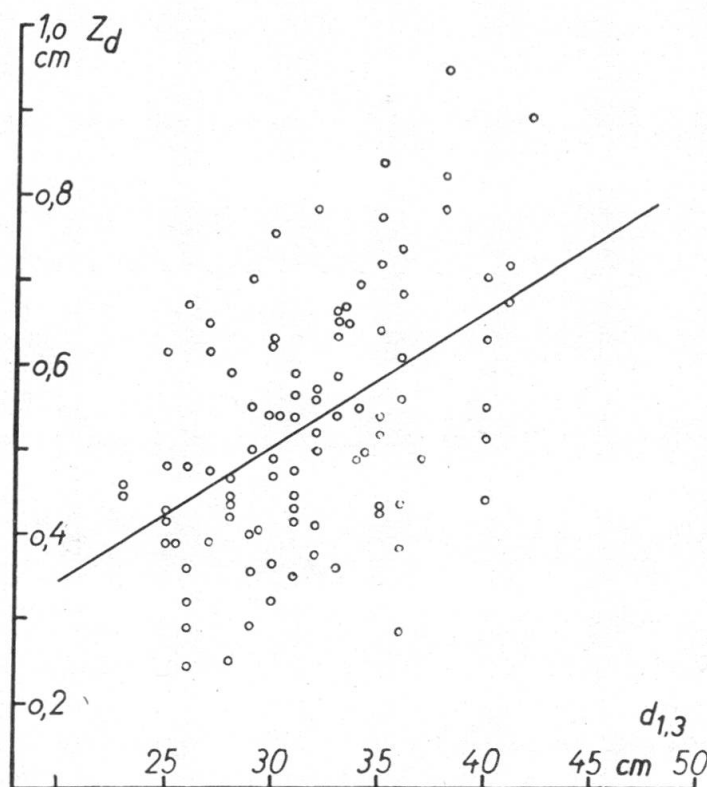


Abbildung 5

Punktschwarm von 94 Stärkezuwüchsen über den zugeordneten Brusthöhen-
durchmessern (70j. Ki-Lichtwuchsbestand)

Der Höchstfehlerrahmen, den wir bei einer im Forstwesen allgemein üblichen Grenzwahrscheinlichkeit von 5 ‰ zu erwarten haben, würde dann $\pm 6\text{‰}$ sein, da in der t -Verteilung bei einer Grenzwahrscheinlichkeit von 5 ‰ $t \cong 2$. Hinsichtlich des Nachweises der Brauchbarkeit dieser mathematisch-statistisch errechneten Fehlerrahmen sowie einer Möglichkeit der Stratifikation in Kronenklassen darf ich wiederum auf die oben angedeutete Arbeit (5) verweisen, wo ich eingehend diese beiden Probleme abgehandelt habe.

In der Tabelle 8 ist der Rechengang für den Massenzuwachs dieses oben geschilderten Beispiels durchgeführt worden. Spalte 2 enthält die

Tariffreihe (hier Tarif Nr. VI des Einheitshöhenstufentarifs Krutzsch-Loetsch), Spalte 3 die zugehörigen Steigungsfaktoren und Spalte 4 die gemäß eben durchgeführter Berechnung der Stärkezuwachsgeraden ermittelten Durchmesserzuwüchse.

Tabelle 8

Beispiel einer Massenzuwachsberechnung nach der Tariffdifferenzmethode und Bohrspanprobe, Oberstand eines 70jährigen Kiefernlichtwuchsbestandes. Inventur 1950

Durchmesser- klasse in cm 1	Tarif VI nach Krutzsch-Loetsch fm 2	Steigungsfaktor fm 3	$l_z D$ pro Jahr cm 4	Sp. 4 mal Rindenfaktor 1,12 5	$l_z v$ pro Stamm (Sp. 3 · Sp. 5) 6	Stammzahl je ha 7	$l_z v$ pro Durchm. kl. (Sp. 6 · Sp. 7) fm 8	Vorrat pro Durchm. kl. (Sp. 2 · Sp. 7) fm 9
22,5	0,31	0,033	0,385	0,431	0,014 223	40,4	0,58	12,69
27,5	0,50	0,042	0,465	0,521	0,021 882	59,4	1,30	29,70
32,5	0,73	0,050	0,545	0,610	0,030 500	52,1	1,59	38,09
37,5	1,00	0,057	0,625	0,700	0,039 900	21,6	0,86	21,58
42,5	1,30	0,064	0,705	0,790	0,050 560	5,1	0,26	6,66
47,5	1,64	0,071	0,785	0,879	0,062 409	0,5	0,03	0,82
					je ha:	179,1	4,62 fm $z_v \% =$ 4,2 %	109,54 fm

Da durch die Bohrung die Durchmesser ohne Rinde erhalten werden, wir aber im Steigungsfaktor auch den innerhalb der Rinde stattfindenden Zuwachs mit berücksichtigen, müssen die Werte der Stärkezuwachsgeraden noch mit einem Rindenfaktor multipliziert werden, welcher in unserem Falle 1,12 beträgt. Über die Ermittlung des Rindenfaktors in der Praxis, zum Beispiel mit Hilfe des schwedischen Rindenmessers, und über die weitgehend mögliche Anwendung von Tabellen, welche die Messung im Walde erübrigen, habe ich in der genannten Arbeit (5) ebenfalls umfangreiche Untersuchungen veröffentlicht, auf die ich hier wiederum verweisen darf. In Spalte 6 erhalten wir durch Multiplikation der Spalten 3 und 5 den laufenden jährlichen Massenzuwachs eines Stammes der betreffenden Durchmesserklasse. Durch Multiplikation mit der vorgefundenen Stammzahl der Durchmesserklasse (in Spalte 7 sind die Stammzahlen bereits auf den Wert je ha umgerechnet worden) erhalten wir in Spalte 8 die Massenzuwüchse der einzelnen Durchmesserklassen des Waldobjektes. Spalte 9 ergibt hierzu zum Vergleich die Vorräte. Die Addition der Spalte 8 ergibt den Gesamt-massenzuwachs von 4,62 fm/ha.

Zusammenfassend zeigen sich bei der Benutzung von Bohrspanen zur Ermittlung der Stärkezuwachsgeraden für die Tariffdifferenzmethode im Vergleich zu andern Methoden folgende Charakteristika:

a) Bei der Zuwachsberechnung zum Beispiel nach der Schnei-

derschen Formel $z_v \text{ ‰} = \frac{D}{k} \cdot z_r$ (auf die mathematisch unkorrekte

bisher übliche Schreibweise $\frac{k}{D \cdot n}$ bin ich ausführlicher in einer andern Veröffentlichung eingegangen [6], auf die ich hier verweisen darf) erfolgt die Bohrspanprobenahme in einem zweiten Arbeitsgang nach der Vorratsinventur, weil zunächst erst die Kreisflächenmittelstämme errechnet werden müssen, die man dann im Walde zur Zuwachsprobe aufsuchen muß. Ganz ähnlich ist es bei dem sog. H o h e n a d l'schen Verfahren, wo die $D+$ - und $D-$ -Stämme ebenfalls im Bestand zur Bohrung herausgesucht werden müssen. Die Bohrspanprobenahme nach dem Tariffdifferenzverfahren kann gleichzeitig mit der Vorratsaufnahme in einem Arbeitsgang erfolgen. Der Faktor k der Schneiderschen Formel wird nicht mehr gebraucht. Der Zuwachs fällt nicht nur im ganzen, sondern auch in den Stärkeklassen an.

b) Die Errechnung des laufenden Massenzuwachses nach der Tariffdifferenzmethode ist, wie aus Tabelle 8 hervorgeht, außerordentlich einfach, zumal die Steigungsfaktoren und im wesentlichen auch die Rindenfaktoren aus Tabellen entnommen werden können. Lediglich die Errechnung der Stärkezuwachsgeraden auf dem Wege über die Methode der kleinsten Quadrate wird, weil im allgemeinen zu wenig gebräuchlich, zunächst auf gewisse Schwierigkeiten stoßen. Wenn jedoch dieser Rechengang nach genau festgelegten Vordrucken gut durchorganisiert wird, so bietet er bei Benutzung von Rechenmaschinen keinerlei technische Schwierigkeiten.

c) Die Tariffdifferenzmethode unter Anwendung der Bohrspanprobenahme ergibt neben der Vorratserstinventur gleichzeitig auch die Zuwachsinventur. Bei Anwendung der Formel

$$lz_v = \frac{1}{n} (V_E - V_A + N)$$

fällt die erste Zuwachsangabe bei der Vorratszweitinventur an.

(Schluß folgt)