

Zeitschrift: Wasser Energie Luft = Eau énergie air = Acqua energia aria
Herausgeber: Schweizerischer Wasserwirtschaftsverband
Band: 74 (1982)
Heft: 5-6

Artikel: Daniel Bernoulli zum 200. Todestag
Autor: Vischer, Daniel
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-941135>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Daniel Bernoulli zum 200. Todestag

Daniel Vischer

Daniel Bernoulli – sein Porträt zeigt Bild 1 – ist am 29. Januar 1700 geboren und am 17. März 1782, also vor 200 Jahren, gestorben. Er besass und besitzt weltweit Anerkennung als bahnbrechender Forscher in der Medizin, der Mathematik und insbesondere der Physik. Dementsprechend finden sich über ihn verhältnismässig viele biographische Notizen. Von diesen werden hier einige zitiert und, wenn nötig, kommentiert.

Kurzbiographie

1941 schreibt *Otto Spiess* in einem Buch über grosse Schweizer Forscher [1] von *Daniel Bernoulli*:

«Als zweiter Sohn *Johann Bernoullis* in Groningen geboren, studierte *Daniel*, wie früher sein Vater, die Medizin, besuchte Heidelberg, Strassburg und nach abgelegtem Doktorexamen (1721) noch Venedig und Padua, lernte aber daneben von früh auf Mathematik. Schon 1724 erschien ein Buch von ihm, und im folgenden Jahr erhielt er einen Preis der Académie des Sciences und, zusammen mit seinem älteren Bruder *Nikolaus*, einen Ruf an die neue Akademie in Petersburg. 1733 kehrte er aus Russland nach Basel zurück als Professor für Anatomie, gab 1738 sein Hauptwerk, die Hydrodynamik, heraus, und konnte endlich 1750 seinen Lehrstuhl gegen die Professur für Physik vertauschen, die er bis zu seinem Tode behielt. Seine bedeutendsten Arbeiten liegen auf dem Gebiet der mathematischen Physik, zu deren Begründern er gehört.»

Umwelt und Persönlichkeit Bernoullis

Eine entsprechende Würdigung liefert wiederum *Otto Spiess* [1]:

«Drei Söhne und ein Neffe *Johann Bernoullis* waren über den Durchschnitt hinaus mathematisch begabt. Aber das Übergewicht des ruhmvollen Seniors lähmte ihren Ehrgeiz, bei einigen bis zur Indolenz. Dafür waren alle von angenehmem Charakter und lebten in mustergültiger Eintracht. Dennoch brachte der zweitälteste Sohn, *Daniel*, das Kunststück fertig, sich dem Einfluss des Vaters zu entziehen und auf eigenen Wegen zu einem Forscher ersten Ranges aufzusteigen. Dies wurde dadurch möglich, dass

der Schwerpunkt seines Talents gerade in der mathematischen Physik lag, für welche die älteren Bernoulli weniger Begabung zeigten. Obgleich er auch in der reinen Mathematik seinen Mann stellte, war diese für ihn nicht Selbstzweck, sondern ganz im Sinn des grossen Newton nur wertvoll als Mittel zum Verständnis der Wirklichkeit. Damit stand er aber im Gegensatz zu der auf dem Festland herrschenden Cartesischen und Leibnizischen Philosophie, in deren Geist die Forscher Gott und die Welt der Rechnung zu unterwerfen strebten, während er selbst der Theorie, dem Formelwesen, nur eine dienende Rolle in der Erkenntnis der Natur zuerkennen wollte. «Je respecte et j'admire les *Eulers*; mais j'adore les *Newtons* et *Huighens*» – schreibt er einmal einem Neffen. Wie diese Vorbilder begann er mit einem gründlichen Studium der zu erklärenden Phänomene, bevor er Hypothesen bildete, und er verstand es meisterlich, mit wenig mathematischem Apparat den Erscheinungen gerecht zu werden. War sein Vater der grosse Mehrer und Verbreiter Leibnizischen Gedankengutes, so hat man in *Daniel Bernoulli* wohl den wichtigsten Vermittler und Förderer der Newtonschen Lehren zu sehen.

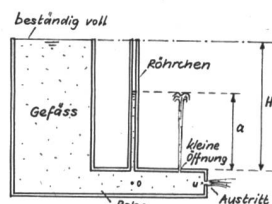
Da seine zarte Konstitution ihm andauernde Anstrengung verbot, ist der äussere Umfang seines Lebenswerkes wenig bedeutend. Aber seine meist kurzen Arbeiten, von denen zehn von der Pariser Akademie gekrönt wurden, enthalten oft für ihre Zeit erstaunlich moderne Ideen, zum Beispiel neuartige Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, oder die Vorwegnahme der kinetischen Gastheorie und haben ihn doch zu einem Klassiker der mathematischen Physik gemacht.

Seine Überlegenheit auf diesem Gebiet hätte ihm manchen Anlass zu grimmigen Fehden geboten, wenn seiner vornehmen Art nicht jede öffentliche Polemik verhasst gewesen wäre. Die härteste Prüfung wurde ihm auferlegt, als nach dem Erscheinen seines epochemachenden Hauptwerks der siebzijährige Vater die besten Erfindungen für sich in Anspruch nahm und sie in seinen gesammelten Werken nochmals publizierte. Aber *Daniel* schwieg, und vor dem Urteil der Geschichte hat *Johann Bernoulli* wie gegen den Bruder, so auch gegen den Sohn den Prozess verloren.

Daniel Bernoulli blieb unverheiratet. Er war klein von Gestalt, sehr verbindlich im Umgang und gehaltvoll im Gespräch. Von seiner grossen Korrespondenz hat sich relativ



Bild 1. Daniel Bernoulli 1700–1782 (aus [1]).



Austrittsgeschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{H} \quad (1)$$

Geschwindigkeit im Rohr

$$v_0 = \frac{\sqrt{H}}{n} \quad (2)$$

Druck im Rohr

$$a = H \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right) \quad (3)$$

Bild 2. Auszüge aus Daniel Bernoullis Buch «Hydrodynamica» [2]. Gefäss mit Ablaufrohr und freiem Ausfluss. Ansatz für die Berechnung des Druckes im Rohr und Ergebnis (Gleichung 3).

Theorem bzw. Satz von Bernoulli

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{konstant} \quad (4)$$

Anwendung auf Rohr von Bild 2

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} = H \quad (5)$$

$$\frac{v_0^2}{2g} = H \quad (6)$$

Kontinuitätsgleichung

$$F_0 v_0 = F_a v_a \text{ oder } v_0 = \frac{v_a}{n} \quad (7)$$

Austrittsgeschwindigkeit (aus 6)

$$v_a = \sqrt{2gH} \quad (8)$$

Druck im Rohr (aus 5, 6, 7)

$$\frac{p_0}{\rho g} = H - \frac{v_a^2}{2g} \cdot \frac{1}{n^2} = H \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

das heisst

$$a = H \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = H \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right) \quad (9)$$

Bild 3. Theorem von Bernoulli und Anwendung auf das Gefäss von Bild 2 zwecks Berechnung des Druckes im Rohr. Das Ergebnis (Gleichung 9) stimmt mit demjenigen von Bild 2 (Gleichung 3) überein.

wenig erhalten, eine Gesamtausgabe seiner Werke steht noch aus. Sein Epitaph hängt, neben denen anderer Bernoulli, in der Peterskirche, in deren Nähe seine Wohnung lag. Sein Neffe Jakob (II.), der in seinem Geist weiterarbeitete, wurde durch einen frühen Tod hinweggerafft. Mit ihm erlosch das mathematische Genie dieser Familie».

Das Theorem von Bernoulli

Die Formel, die Bernoulli zugeschrieben und nach ihm benannt wird, ist in Bild 3, Gleichung 4, wiedergegeben. Sie ist jedem Wasserbauer und Hydrauliker geläufig; in anderen Worten, sie wird praktisch bei allen Berechnungen von stationären Abflüssen durch Leitungen, Kanäle und Flüsse verwendet – allerdings erweitert um ein Glied, das die Strömungsverluste berücksichtigt. In dieser Form stellt sie eine bestimmte Schreibweise des Energieerhaltungssatzes dar, was bemerkenswert ist, weil dieser Satz, wie Paul-Gerhard Franke [2] anmerkt, erst 100 Jahre nach den einschlägigen Veröffentlichungen Bernoullis von Robert Mayer ausformuliert wurde.

Blättert man nun aber im Hauptwerk Bernoullis, dem 1738 in Strassburg gedruckten Buch «Hydrodynamica sive, de viribus et motibus fluidorum» – es wurde 1964 von Karl Flierl [3] ins Deutsche übersetzt und 1965 [4] kommentiert –, so findet man die Formel von Bild 3, Gleichung 4, nicht. Und nach Hunter Rouse und Simon Ince [5] sucht man auch in den anderen Veröffentlichungen Bernoullis vergeblich danach. Hingegen scheint in der «Hydrodynamica» das Gedankengut auf, das dieser Formel zugrundeliegt. So behandelt Bernoulli dort beispielsweise im zwölften Kapitel über «die Statik bewegter Flüssigkeiten» unter Paragraph 5 das in Bild 2 skizzierte Gefäss: «Gegeben sei ein sehr weites Gefäss . . . , das beständig voll Wasser gehalten und mit einem waagrechten zylindrischen Rohr . . . versehen wird. Am äussersten Ende befinde sich eine Öffnung, welche das Wasser mit gleichförmiger Geschwindigkeit aussendet. Gesucht ist der Wasserdruck gegen die Rohrwände».

Dann folgt eine längere Abhandlung, bei der die Austrittsgeschwindigkeit gemäss Bild 2, Gleichung 1, der Wurzel aus der Fallhöhe gleichgesetzt wird und die zu einer Lösung für den Wasserdruck gemäss Bild 2, Gleichung 3, führt. Diese Lösung ist richtig, wenn man, wie dies Bernoulli bewusst getan hat, die Strömungsverluste vernachlässigt, und wenn die Durchmesser des Rohrs und des Austrittsquerschnitts gegenüber der Fall- und der Druckhöhe klein sind; und zwar ist sie richtig, obschon der von Bernoulli gewählte Ansatz für die Austrittsgeschwindigkeit unvollkommen ist.

Zur weiteren Illustration sei hier noch der von Bernoulli als Zusatz bezeichnete Paragraph 7 angeführt: «Wenn das Rohr irgendwo durch eine sehr kleine Öffnung . . . angebohrt ist, dann springt das Wasser mit einer Geschwindigkeit aus, die zu einer Höhe $H(n^2 - 1)/n^2$ ansteigen kann, wenn nur nirgends fremde Widerstände auftreten. Es entsteht also eine Sprunghöhe wie in Bild 2, und es ist $a = H(n^2 - 1)/n^2$. Hat man aber ein lotrechtes oder auch ein beliebig geneigtes Röhrchen . . . , das mit dem waagrechten Rohr zusammenhängt, aber doch so, dass das Ende des eingesteckten Röhrchens nicht in den Hohlraum des waagrechten Rohrs hineinragt, damit nicht das vorüberfliessende Wasser an diesem Ende anstösst, dann wird die lotrechte Höhe a des im angebrachten Röhrchen befindlichen Wassers ebenfalls gleich $H(n^2 - 1)/n^2$. Es ist aber in diesem letzteren Fall nicht notwendig, dass das Röhrchen . . . sehr eng ist».

Daraus und aus weiteren Stellen der «Hydrodynamica» geht hervor, dass Bernoulli seine Aussagen durch Experimente überprüfte und dabei als Erster Standrohre (Piezometer) einsetzte. Mit seinen Ableitungen und Experimenten lieferte er zusammen mit seinen Zeitgenossen Alexis Claude Clairault und Jean le Rond d'Alembert die Grundlagen, auf denen Leonhard Euler seine berühmten Flüssigkeitsbewegungsgleichungen aufbaute [15]. Euler lebte von 1707 bis 1783, auch er war also ein Zeitgenosse und überdies ein Landsmann und verehrter Freund Bernoullis und leistete in der Hydromechanik Bahnbrechendes. Ihm blieb es vorbehalten, durch eine Zusammenfassung seiner Flüssigkeitsbewegungsgleichungen die Formel von Bild 3, Gleichung 4, aufzustellen – eben die Formel, die heute gemeinhin Bernoulli zugeschrieben wird.

Euler bezeichnete denn auch die von Bernoulli präsentierten Lösungen als Spezialfälle seiner Flüssigkeitsbewegungsgleichungen und deren Zusammenfassung [4]. Dieser Zusammenhang wird in Bild 3 deutlich, wo gezeigt wird, wie heutige Wasserbauer und Hydrauliker das System von Bild 2 berechnen und den Druck im Rohr bestimmen würden: Das entsprechende Ergebnis von Bild 3, Gleichung 9, deckt sich genau mit demjenigen aus der «Hydrodynamica» von Bernoulli gemäss Bild 2, Gleichung 3.

Bezeichnungen:

- H Spiegeldifferenz, Fallhöhe
- a Druckhöhe im Rohr
- v Fliessgeschwindigkeit
- F Fliessquerschnitt
- n Verhältnis von Rohrquerschnitt zu Austrittsquerschnitt, also F_0/F_u
- p Flüssigkeitsdruck
- ρ Flüssigkeitsdichte
- g Erdbeschleunigung
- z Kote (der betrachteten Stelle)
- o, u Indizes: o für einen beliebigen Rohrquerschnitt, u für den Austrittsquerschnitt.

Bernoullis Bedeutung für die Hydromechanik

Der Umstand, dass man den Satz oder das Theorem von Bernoulli in dessen Veröffentlichung vergeblich sucht, tut seinem Ruhm keinen Abbruch. Gerade sein Buch «Hydrodynamica» zeigt, wie umfassend seine Kenntnisse im Gebiet der Hydromechanik waren. Die Kapitelüberschriften lassen es erahnen [2]:

- «1: Einleitung und Vorbemerkungen
- 2: Handelt von den ruhenden Flüssigkeiten und deren Gleichgewicht teils unter sich und teils in bezug auf andere Kräfte.
- 3: Über die Geschwindigkeiten von flüssigen Körpern, die aus einem irgendwie geformten Gefäss durch eine beliebige Öffnung ausfliessen.
- 4: Über die verschiedenen Zeiten, die beim Ausfluss der Wassermassen verstreichen können.
- 5: Über die Bewegung des Wassers aus ständig gefüllten Gefässen.
- 6: Über die Bewegung nicht ausströmender oder zwischen Gefässwänden bewegter Flüssigkeiten, dabei besonders über deren Schwingungen.
- 7: Über die Wasserbewegung durch untergetauchte Gefässe, wobei besonders an Beispielen gezeigt wird, wie nützlich das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte ist auch in den Fällen, in denen davon kontinuierlich etwas als verloren anzusehen ist.
- 8: Über die Bewegung teils homogener, teils heterogener Flüssigkeiten durch Gefässe von unregelmässiger und

jäh abgebrochener Bauart, wobei durch die Theorie der lebendigen Kräfte, von denen ein Teil ständig absorbiert werden möge, hauptsächlich die einzelnen Vorgänge bei Flüssigkeiten, die sehr viele Öffnungen passieren, erklärt werden, mit Hilfe vorausgeschickter allgemeiner Regeln für die jeweils zu bestimmenden Flüssigkeitsbewegungen.

- 9: Über die Bewegung von Flüssigkeiten, die nicht nur durch ihr eigenes Gewicht, sondern auch durch eine fremde Kraft ausgeworfen werden, wobei es sich vor allem um hydraulische Maschinen und um ihren äussersten Vervollkommnungsgrad handelt, den man ihnen geben kann.
- 10: Über die Beschaffenheit und Bewegung elastischer Flüssigkeiten, besonders der Luft.
- 11: Über die Flüssigkeiten, die zu einem Wirbel angetrieben werden, dann auch über solche, die in bewegten Gefässen enthalten sind.
- 12: Enthält eine neue Statik bewegter Flüssigkeiten, die «hydrauliko-statisch» genannt werden kann.
- 13: Über die Reaktion von Flüssigkeiten. Über das Mass der Wirkung, die daraus für die Navigation gewonnen werden kann, wobei zugleich eine neue Theorie zur Bestimmung des Stosses von Flüssigkeiten vorgelegt wird, die nach ihrem Ausfluss gegen eine Wand anlaufen.

Dazu bemerken *Hunter Rouse* und *Simone Ince* treffend [4]:

«Bei der Behandlung dieser mannigfachen Themen schuf Bernoulli vieles, was neu war und dennoch selten mit seinem Namen in Zusammenhang gebracht wird. Beispielsweise begründete er die kinetische Gastheorie in ihren wesentlichen Aspekten... Er erarbeitete Lösungen für die Form der Wasseroberfläche oder anderer Flächen konstanten Druckes in beschleunigten und rotierenden Gefässen. Er verallgemeinerte das Problem der schwingenden Wassermasse in kommunizierenden Gefässen – dieses Problem war von Newton eingeführt und von Bernoullis Vater erweitert worden – indem er die Periode des einfachen Pendels als Referenzzeit einführte. Er war der erste, der die graduelle Entwicklung der Strömung in langen Rohren diskutierte. Und er entwickelte auch die Idee eines Stahlantriebes für Schiffe, obschon sein Konzept unter dem Umstand litt, dass er nur an die Reaktion des Gefässausflusses infolge der Schwerkraft allein dachte» (aus dem Englischen übersetzt).

Und *Paul Gerhard Franke* [2] schreibt in seiner kürzlichen Würdigung prägnant: «Daniel Bernoullis Hydrodynamik ist das erste Werk, in dem die Flüssigkeitsbewegung auf mathematischer Grundlage behandelt wird».

Der Ruhm Bernoullis

Auf *Daniel Bernoulli* fiel schon zu Lebzeiten der Glanz der Bernoulli-Dynastie, wie seine der Mathematik verpflichtete Verwandtschaft etwa genannt wird. Er besass aber, wie hier schon mehrfach geschildert, durchaus eine eigene Ausstrahlung und Bedeutung. Dies veranschaulicht unter anderem die von *Friedrich Huber* [6] wiedergegebene Anekdote:

«Es ist im Frühherbst des Jahres 1733. Auf einer Landstrasse in der Nähe von Paris holpert eine Postkutsche dem nächsten Dorf in östlicher Richtung entgegen. Ihre drei Insassen haben eben eine Pause eingeschaltet in das hochwissenschaftliche Gespräch, in das sie vertieft waren. Nun merken die drei Männer, dass sie einander ja noch gar nicht kennen. Der eine der beiden jüngeren Herren stellt sich seinem Gegenüber, einem lebhaften Franzosen

vor: *Daniel Bernoulli*. Überrascht und verblüfft stutzt dieser einen Moment, doch hat er sich rasch gefasst, und im nächsten Augenblick schon blitzt der Schalk in seinen Augen auf: Mein Name ist *Newton*. Befriedigt lächelnd lehnt er sich wieder in die Polster zurück; er hat gut pariert und ist nicht auf den Scherz hereingefallen.

Doch der biedere Herr *Trant*, seines Zeichens Botaniker, hat sich getäuscht, wie er bald beschämt einsehen muss. Vor ihm sitzt wirklich der berühmte Mathematiker und Physiker *Daniel Bernoulli*. Doch diesen freut das indirekte Kompliment, diese Hochachtung vor dem Namen Bernoulli, und sein Leben lang hat er sich mit Vergnügen an die Episode erinnert.»

Der spontane Vergleich mit Newton unterstreicht, dass Bernoullis Verdienste vor allem im Gebiet der Physik, zu der ja die Hydromechanik gehört, begründet waren und es noch sind. Im übrigen schildert *Friedrich Huber* [6] die Bedeutung Bernoullis als Physiologe, etwa in der Hämodynamik, und als Statistiker aus medizinischer Sicht. Und aus einer Schrift von *Andreas Speiser* über die Basler Mathematiker [7] gehen die Leistungen Daniel Bernoullis in der Mathematik, insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, hervor.

Literatur:

- [1] *Fueter Eduard*: Grosse Schweizer Forscher. Atlantis Verlag, Zürich, 1941, mit einem Kapitel von Otto Spiess: Daniel Bernoulli S. 126–128.
- [2] *Franke Paul-Gerhard*: Daniel Bernoulli zum 200. Todestag. «Wasserwirtschaft» 72 (1982) 5.
- [3] *Flierl Karl*: Des Daniel Bernoulli Hydrodynamik (Übersetzung des Originalwerkes). Veröffentlichung des Forschungsinstitutes des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik. Reihe C, 1 a, München 1965.
- [4] *Flierl Karl*: Anmerkungen zu Daniel Bernoullis Hydrodynamica. Reihe C wie oben, 1 b, München 1965.
- [5] *Rouse Hunter, Simone Ince*: History of Hydraulics. Iowa Institute of Hydraulic Research, Iowa City 1957, and Dover Publications, New York 1963.
- [6] *Huber Friedrich*: Daniel Bernoulli als Physiologe und Statistiker. Benno Schwabe Verlag, Basel 1959.
- [7] *Speiser Andreas*: Die Basler Mathematiker. 117. Neujahresblatt der Gesellschaft zur Beförderung des Guten und Gemeinnützigen, Verlag Helbing und Lichtenhahn, Basel 1939.

Adresse des Verfassers: Prof. Dr. *Daniel Vischer*, Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie der ETH Zürich, 8092 Zürich.

Die Nutzung der Donau zwischen Bratislava und Budapest

Eduard Gruner

Das Tschechoslowakische Talsperrenkomitee veranstaltete in Bratislava vom 28. September bis 1. Oktober 1981 seine 18. Jahrestagung. Einem Kreise von 382 Teilnehmern, wovon 83 Ausländer waren, wurde dabei der Plan für die Nutzung der Donau von Bratislava bis Budapest gezeigt. An diesem Fluss wurde erst in neuerer Zeit mit dem Bau einer Kaskade von Wasserkraftwerken begonnen. Im österreichischen Abschnitt waren 12 Werke geplant, von denen 6 bereits im Betrieb stehen, während 2 im Bau sind. Der schwierigste Abschnitt lag im «Eisernen Tor», wo Jugoslawien und Rumänien das Werk Djerdap erstellt haben. Sie haben seither stromabwärts auch den Bau von Djerdap 2 eingeleitet. Der mittlere Abschnitt blieb bisher unberührt. Wegen einer Verminderung des Gefälles wird darin Geschiebe abgesetzt, das darum als Furtenabschnitt gilt. Dieser Abschnitt misst 220 km, wovon 142 km die Staats-