

# Lineares und quadratisches Speichermodell der Hydrologie

Autor(en): **Führer, Harald / Nowak, Werner Georg**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Wasser Energie Luft = Eau énergie air = Acqua energia aria**

Band (Jahr): **106 (2014)**

Heft 3

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-939752>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Lineares und quadratisches Speichermodell in der Hydrologie

Harald Führer, Werner Georg Nowak

## Zusammenfassung

Zur Thematik der hydrologischen Speichermodelle präsentiert dieser Artikel einen quadratischen Ansatz: Der Zusammenhang zwischen Speicherinhalt  $S$  und Abflussintensität  $Q$  wird durch eine Gleichung  $Q = aS + bS^2$  modelliert. Es zeigt sich, dass dies – zumindest für den wichtigen Fall eines Blockregens – ebenfalls auf explizite Modellfunktionen für  $S$  und  $Q$  führt, zum Unterschied zu den zur Verfügung stehenden komplizierteren Ansätzen, die durchwegs nur numerisch gelöst werden können. Für empirische Daten von zwei Fließgewässern in Ostösterreich werden das lineare und das quadratische Modell miteinander verglichen, mittels zweier unabhängiger bekannter Verfahren, nämlich dem  $F$ -Test und dem sog. Akaike-Kriterium. Es zeigt sich eine signifikante Überlegenheit des quadratischen Ansatzes.

## 1. Einleitung

In der Wasserwirtschaft und der angewandten Hydrologie besteht ein wichtiger Problembereich darin, die Wasserstandshöhe fließender Gewässer im Laufe der Zeit in Abhängigkeit von der Niederschlagsintensität zu modellieren und damit voraussagbar zu machen. Dies ist von Bedeutung sowohl für den Hochwasserschutz als auch hinsichtlich der wirtschaftlichen Nutzbarkeit des Wassers für Bewässerung und den Betrieb von Kraftwerken.

Für einen beliebigen Zeitpunkt  $t$  bezeichnet  $Q(t)$  die Abflussstärke eines bestimmten Fließgewässers, gemessen an einem fixen Messpunkt, sowie  $I(t)$  die Gesamt-Niederschlagsintensität im zugehörigen Wassereinzugsgebiet, beide in  $\text{m}^3/\text{s}$ .  $Q(t)$  hängt prinzipiell von den Niederschlagswerten  $I(\tau)$  vor dem Zeitpunkt  $t$  ab ( $\tau < t$ ), wobei allerdings die Gewichtung

schwer zu beschreiben ist. Man betrachtet daher – zunächst als eine Art «virtuelles Konstrukt» (!) – zusätzlich den sogenannten Speicherinhalt  $S(t)$ , den man sich als jene Wassermenge vorstellen kann, die vor dem Zeitpunkt  $t$  als Niederschlag auf das Einzugsgebiet fiel und nach dem Zeitpunkt  $t$  die betrachtete Messstelle passieren wird. Selbstverständlich gibt es realistische, anschauliche Interpretationen für  $S(t)$ , etwa als Inhalt eines (Stau-)Sees. Unter Vernachlässigung bzw. Ausschluss von Änderungen des Aggregatzustandes (Verdunstung, Schneeschmelze) – dies möge im Folgenden durchwegs gelten – folgt plausibel die Speichermodellgleichung

$$S'(t) = I(t) - Q(t) \quad (1)$$

Nun liegt es weiter nahe, dass die Abflussintensität (näherungsweise) nur vom Speicherinhalt abhängt:

$$Q = \Phi(S) \quad (2)$$

mit einer noch unbekanntem Funktion  $\Phi$ . Daraus folgt

$$S'(t) = I(t) - \Phi(S) \quad (3)$$

also eine Differentialgleichung, aus der Modellfunktionen  $S = S(t)$  und  $Q = Q(t)$  bestimmt werden können, sofern die Niederschlagsfunktion  $I(t)$  sowie  $\Phi$  bekannt sind. Als grundlegende Literatur für dies und das Folgende seien *T. Dracos* [5], *S. Dyck & G. Peschke* [7], *R. Herrmann* [8], *R. Hinkelmann* [10], *W. Hosang & W. Bischof* [11] sowie *U. Maniak* [12] zitiert.

## 2. Der lineare Speicher

Im Sinne der Einfachheit ist es in der Hydrologie Standard, zumindest als ersten Ansatz eine direkte Proportionalität zwischen  $S$  und  $Q$  anzunehmen, also  $Q = \Phi(S) = a \cdot S$  anzusetzen, wobei  $a$  als Speicherkons-

tante bezeichnet wird. Lösen der Gl. (3) führt damit schlussendlich auf die Abfluss-Modellfunktion

$$Q(t) = a \cdot e^{-a \cdot t} \int_0^t I(\tau) e^{a \cdot \tau} d\tau + Q(0) e^{-a \cdot t} \quad (4)$$

Hier beschreibt der erste Term rechts den Einfluss des Niederschlags im Zeitintervall  $0 \leq \tau \leq t$ , der zweite das Abfließen des bereits bei  $t = 0$  vorhandenen Speicherinhalts. Allerdings ist es in der Praxis sehr problematisch, eine analytische Niederschlagsmodellfunktion  $I(\tau)$  anzugeben. Häufig wird der Niederschlag daher als auf einem Intervall zeitlich konstant  $I = I_c$  modelliert («Blockregen»). Hierfür vereinfacht sich Gl. (4) zu

$$Q(t) = I_c (1 - e^{-a \cdot t}) + Q(0) e^{-a \cdot t} \quad (5)$$

Weiter ist es üblich, längere Fließgewässer abschnittsweise durch eine sogenannte Speicherkaskade zu beschreiben, d.h. durch eine Folge linearer Einzelspeicher  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , welche durch die Gleichungen  $I_j(t) = Q_{j-1}(t)$  für  $j \geq 1$  verbunden sind.

## 3. Nichtlineare Modelle

Zunächst sei erwähnt, was sich ergibt, wenn man den Speicher als Becken in Form eines verallgemeinerten Zylinders modelliert, aus dem unten durch eine fixe Öffnung (Rohr) das Wasser abfließt. Dann hängt  $Q(t)$  nur von der Austrittsgeschwindigkeit ab und ist nach dem Gesetz von Torricelli proportional zu  $\sqrt{S(t)}$ , also  $Q = \Phi(S) = a_0 \sqrt{S}$ . Diese Annahme hat allenfalls Bedeutung für das Entleeren von Stauseen; eine interessante praktische Anwendung auf die Möhnetalsperre in Nordrhein-Westfalen hat *M. Dierks* [4] im Detail ausgeführt.

In der Praxis der Hydrologie geht man aber meist davon aus, dass bei stei-



gendem Speicherinhalt auch der natürliche Abflussquerschnitt deutlich wächst – nach welcher quantitativen Gesetzmäßigkeit, ist a priori unklar. In der Literatur wurden teilweise auf empirischer Basis Ansätze der Form  $Q = \Phi(S) = aS^y$  mit Exponenten  $1 < y < 2$  verwendet, häufiger aber noch rein numerische Berechnungen mit einer unbestimmten nicht-linearen Funktion  $\Phi$  durchgeführt.

Man vgl. dazu – zusätzlich zu der bereits zitierten Literatur – A. Baumgartner & H.J. Liebscher [1], V.T. Chow [3], S. Dyck [6], K.H. Schmidt [14] und E.M. Shaw [15].

#### 4. Der quadratische Ansatz

Grundidee des vorliegenden Artikels ist es, die (a priori unbekannt) Funktion  $\Phi$  durch eine passende quadratische Taylorentwicklung approximativ zu ersetzen: Es sei  $\hat{S}$  ein typischer (mittlerer) Wert für  $S$ , dann ist es plausibel anzunehmen, dass  $\Phi(S)$  in einer Umgebung von  $\hat{S}$  eine Taylorentwicklung besitzt, die wir im Sinne einer Näherung nach dem quadratischen Term abbrechen:

$$Q = \Phi(S) \approx \Phi(\hat{S}) + \Phi'(\hat{S})(S - \hat{S}) + \frac{1}{2}\Phi''(\hat{S})(S - \hat{S})^2 = c_0 + c_1S + c_2S^2. \quad (6)$$

Nun sollte für  $S = 0$  auch  $Q = 0$  folgen, daher wird  $c_0 = 0$  festgesetzt. Nach passender Umbenennung ergibt dies, wieder als Gleichung geschrieben,

$$Q = aS + bS^2 \quad (7)$$

und in Gl. (2) eingesetzt,

$$S'(t) = I(t) - aS(t) - bS(t)^2 \quad (8)$$

mit zwei Konstanten  $a$  und  $b$ , die jeweils an konkrete Daten angepasst werden können.

Der durch Gl. (7) und (8) beschriebene «quadratische Speicher» hat – wie wir zeigen werden zwei Vorteile:

- Zum Unterschied von den anderen zuvor erwähnten nicht-linearen Ansätzen erhält man zumindest für den wichtigen Fall  $I = I_c$  («Blockregen») explizite analytische Lösungsfunktionen.
- Mindestens für gewisse, an zwei Fließgewässern in Ostösterreich erhobene Datensätze ist das quadratische Modell dem linearen schlagend überlegen – in einem wissenschaftlich präzisen Sinn, wie später erörtert wird.

Weiter sei darauf hingewiesen, dass Gl. (7) den früher erwähnten Ansatz  $Q = \Phi(S) =$

$aS^y$  mit  $1 < y < 2$  qualitativ gut approximiert, für den keine explizite analytische Lösung existiert. Dasselbe gilt für stückweise lineare Zusammenhänge

$$Q = \Phi(S) = \begin{cases} a_1S & \text{für } 0 \leq S \leq S_1, \\ a_2(S - S_1) + a_1S_1 & \text{für } S \geq S_1, \end{cases} \quad (9)$$

mit  $a_1 < a_2$ . Diese finden eine natürliche Interpretation in dem Szenario, dass bis zu einem Speicherinhalt  $S_1$  der Niederschlag teilweise vom Boden aufgenommen wird, dieser aber ab  $S = S_1$  gesättigt ist.

#### 5. Lösung der «quadratischen Speichergleichung»

Gl. (8) ist eine sog. Riccati'sche Differentialgleichung: siehe H. Heuser [9]. Als solche besitzt sie die folgende nützliche Eigenschaft: Ist eine Lösung  $S_*(t)$  bekannt, dann erhält man alle andern Lösungen durch den Ansatz

$$S(t) = S_*(t) + \frac{1}{u(t)}, \quad (10)$$

wobei sich für die Hilfsfunktion  $u(t)$  eine lineare Differentialgleichung ergibt. Beschränkt man sich auf ein hinreichend kleines Zeitintervall  $t_1 \leq t \leq t_2$ , dann ist es plausibel und praktisch, wie angekündigt  $I(t)$  durch eine Konstante  $I_c$  zu modellieren. Unter dieser Voraussetzung setzen wir auch  $S_*(t) = S_*$  konstant an und erhalten aus Gl. (8) die simple quadratische Gleichung

$$0 = I_c - aS_* - bS_*^2, \text{ von der}$$

$$S_* = \frac{-a + W}{2b} \quad \text{mit} \quad W := \sqrt{a^2 + 4bI_c} \quad (11)$$

eine Lösung ist. Wir werden daher durchwegs fordern, dass

$$a^2 + 4bI_c \geq 0 \quad (12)$$

gilt. Praktisch bedeutet dies keine wesentliche Einschränkung, da in der Regel ein konvexer Graph  $Q = \Phi(S)$  und daher  $b \geq 0$  zu erwarten ist. (Vgl. die Bemerkung am Ende von Abschnitt 4.) Im Sonderfall  $b = 0$

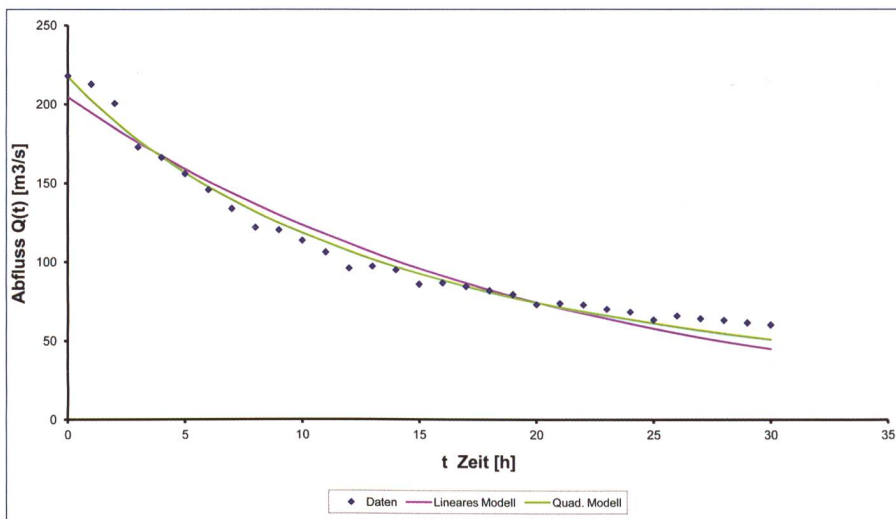


Bild 1. Ybbs, 1./2. September 2010.

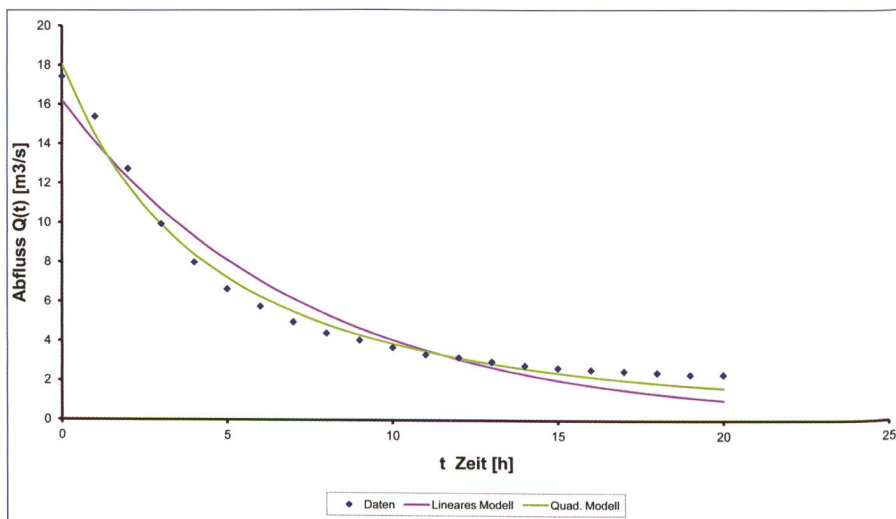


Bild 2. Taffa, 2./3. Juni 2010.

ist  $S = I_c/a$ . Setzt man Gl. (10) mit diesem  $S$  in Gl. (8) ein, so folgt nach kurzer Rechnung die lineare Differentialgleichung  $u'(t) = Wu(t) + b$ . Ihre allgemeine Lösung lautet

$$u(t) = Ce^{Wt} - \frac{b}{W}.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der Riccati'schen DGL (8) auf dem Intervall  $t_1 \leq t \leq t_2$  als

$$S(t) = S_* + \left( Ce^{Wt} - \frac{b}{W} \right)^{-1} \quad (13)$$

Die Abflussstärke  $Q(t)$  ist daraus mittels Gl. (7) zu bestimmen.

Es ist instruktiv, auf der Basis der allgemeinen Lösung (13) die folgende elementare Sequenz von Ereignissen zu diskutieren, die in einführenden Lehrveranstaltungen und Lehrbüchern der Hydrologie häufig betrachtet wird:

- Beginnend mit einem «Anfangsspeicherinhalt»  $S_0 \geq 0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , gibt es zunächst einen Blockregen während eines Zeitintervalls  $0 \leq t \leq T$ ,

mit konstant modellierter Niederschlagsintensität  $I_c$  (Phase A).

- Danach folgt eine niederschlagsfreie Periode, während der das Wasser abfließt und der Pegelstand des beobachteten Fließgewässers sinkt (Phase B).

Um für die Phase A die Modellfunktion  $S_A(t)$  zu finden, brauchen wir nur in Gl. (13) die Anfangsbedingung  $S_A(0) = S_0$  einzusetzen. So erhalten wir mit Gl. (11)

$$C = C_A = \frac{b}{W} + \frac{2b}{2bS_0 + a - W}$$

und somit die Modellfunktion

$$S_A(t) = \frac{W - a}{2b} + \left( \left( \frac{b}{W} + \frac{2b}{2bS_0 + a - W} \right) e^{Wt} - \frac{b}{W} \right)^{-1} \quad (14)$$

Während der Trockenphase B ist  $I_c$  durch 0 zu ersetzen, folglich  $W$  durch  $a$  (wieder wegen Gl. (11)), es entsteht die Modellfunktion

Zur Bestimmung von  $C_B$  beachten wir die «Anfangsbedingung»  $S_B(T) = S_A(T)$ , wobei  $S_A(T)$  aus (14) zu berechnen ist. Eine kurze Rechnung ergibt

$$C_B = \left( \frac{1}{S_A(T)} + \frac{b}{a} \right) e^{-aT},$$

also letztendlich die Modellfunktion

$$S_B(t) = \left( \left( \frac{1}{S_A(T)} + \frac{b}{a} \right) e^{a(t-T)} - \frac{b}{a} \right)^{-1} \quad (15)$$

Die Abflussstärken  $Q_A(t), Q_B(t)$  werden nun wieder mittels Gl. (7) aus Gl. (14) bzw. Gl. (15) berechnet.

## 6. Exkurs: Wie man Modelle vergleicht

Zum Zweck einer fundierten Diskussion «quadratisches versus lineares Speichermodell» geben wir zunächst einen Abriss über zwei gebräuchliche statistische Methoden, Modelle miteinander zu vergleichen. Eine instruktive Darstellung findet man in *H.J. Motulsky & A. Christopoulos* [13], S. 134–159, deren Resultate wir hier zusammenfassen. (Vgl. auch *K.P. Burnham & D.R. Anderson* [2].)

Empirisch gegeben seien  $N$  Datenpaare  $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ . Zur Modellierung des funktionellen Zusammenhangs von  $x$  und  $y$  stehen zwei Modellfunktionen  $y = f_1(x)$  und  $y = f_2(x)$  zur Auswahl, mit  $p_1$  bzw.  $p_2$  freien Parametern,  $0 < p_1 < p_2$ . Es seien  $f_1, f_2$  «verschachtelt» (engl.: nested models) in dem Sinn, dass  $f_1$  entsteht, indem man  $p_2 - p_1$  der Parameter von  $f_2$  einen festen Wert zuweist (meist 0). Es seien

$$FQS_j = \sum_{n=1}^N (f_j(x_n) - y_n)^2, \quad j = 1, 2,$$

die entsprechenden Fehlerquadratsummen, wobei die Parameter in  $f_j$  jeweils so bestimmt werden, dass  $FQS_j$  minimiert wird. Klarerweise ist  $FQS_2 \leq FQS_1$ , wobei in der Regel das strikte Kleinerzeichen gilt. Methode (I) («F-Test»). Es wird der «F-Quotient»

$$F := \frac{FQS_1 - FQS_2}{FQS_2} \frac{N - p_2}{p_2 - p_1}$$

berechnet und daraus z.B. mittels der *Microsoft Excel*™ Formel =FVERT( $F; p_2 - p_1; N - p_2$ ) die Wahrscheinlichkeit  $P_F$ , dass die Verbesserung  $FQS_2 < FQS_1$  nur durch Zufallsschwankungen der Daten zustande kam. Ist  $P_F$  sehr klein, dann sollte die (kompliziertere) Modellfunktion  $f_2$  bevorzugt werden.

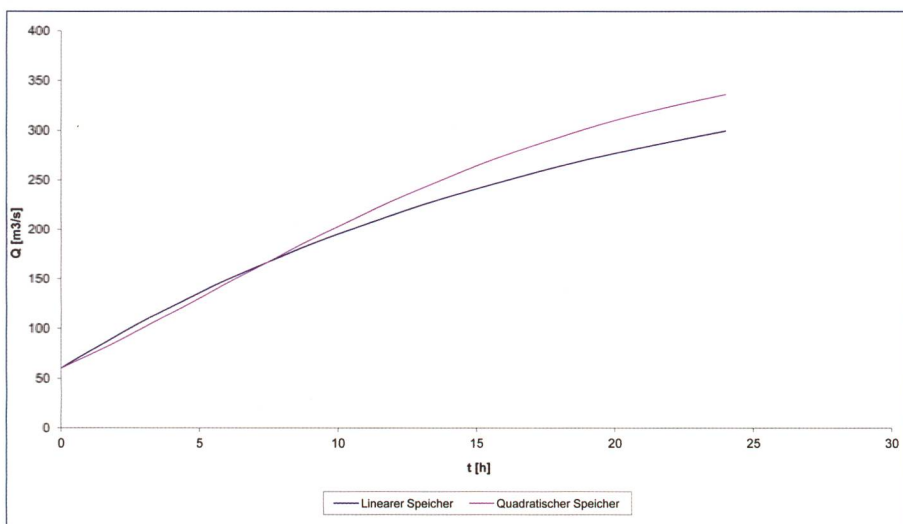


Bild 3. Modellrechnung: Ybbs, Gesamtniederschlag  $I_c = 400 \text{ m}^3/\text{s}$ .

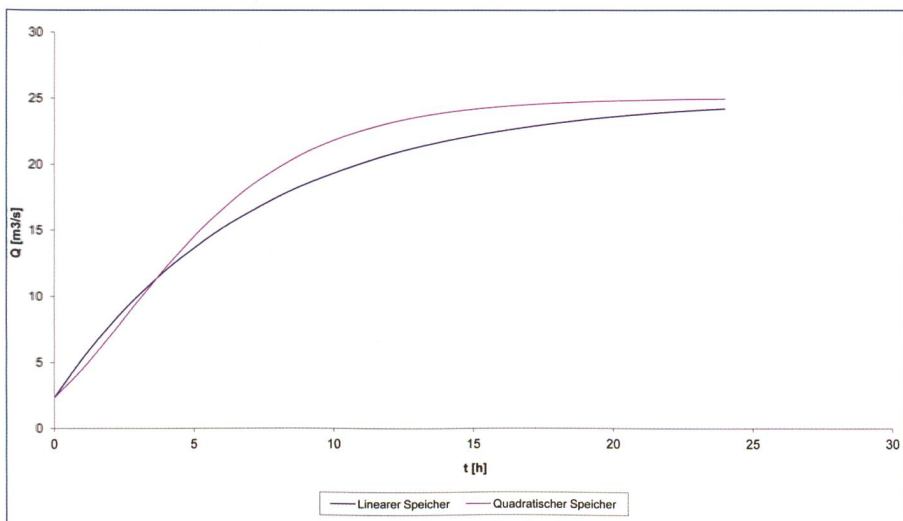


Bild 4. Modellrechnung Taffa, Gesamtniederschlag  $I_c = 25 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Methode (II) («Akaike's Information Criterion»). Für die Modellfunktionen  $f_1, f_2$  ist der («korrigierte») AIC-Index definiert als

$$AIC_{\text{corr}}(f_j) := N \ln \left( \frac{FQS_j}{N} \right) + 2(p_j + 1) + \frac{2(p_j + 1)(p_j + 2)}{N - p_j - 2}$$

Das Modell mit kleinerem Wert von  $AIC_{\text{corr}}(f_j)$  ist eher korrekt: Die Wahrscheinlichkeit, dass dies z.B. für  $f_2$  zutrifft, ist

$$P = \frac{1}{e^{\Delta/2} + 1}, \quad \Delta := AIC_{\text{corr}}(f_2) - AIC_{\text{corr}}(f_1)$$

der sog. Evidenzquotient dafür errechnet sich als

$$\frac{P}{1-P} = e^{\Delta/2}$$

## 7. Vergleich quadratisches versus lineares Modell, anhand empirischer Daten

Zum Vergleich der Modelle wurden zwei durchaus verschiedenartige Flüsse im ostösterreichischen Bundesland Niederösterreich ausgewählt. Zum einen die Taffa (an der Messstelle Frauenhofen), die ein lokal sehr beschränktes Einzugsgebiet von 140 km<sup>2</sup> aufweist, das geologisch am Rand der Böhmisches Masse liegt. Zum anderen die Ybbs (an der Messstelle Greimpersdorf), deren Einzugsgebiet von 1116.6 km<sup>2</sup> bis in die niederösterreichischen Kalkalpen reicht. Die Daten der Durchfluss- bzw. Niederschlagsintensitäten von den offiziellen Messstellen des Landes Niederösterreich für das Jahr 2010 wurden uns freundlicherweise von der Abteilung Hydrologie und Geoinformation (BD3) des Amtes der niederösterreichischen Landesregierung zur Verfügung gestellt. Ausgewählt wurden jeweils Abflusszeitreihen, die durchwegs nach einem ausgeprägten Niederschlagsereignis eine niederschlagsfreie Periode beschreiben; dadurch wurde die quantitative Verwendung von meist stärker fehleranfälligen Niederschlagsmessdaten umgangen.

Im Sinne des in Abschnitt 6 Dargestellten stehen – angesichts der Gl. (5) bzw. (7) und (15) – die beiden Modellfunktionen

$$Q = f_1(t) = a_* S_0^{\text{lin}} e^{-at}$$

und

$$Q = f_2(t) = a \left( \left( \frac{1}{S_0^{\text{quad}}} + \frac{b}{a} \right) e^{at} - \frac{b}{a} \right)^{-1} + b \left( \left( \frac{1}{S_0^{\text{quad}}} + \frac{b}{a} \right) e^{at} - \frac{b}{a} \right)^{-2}$$

zur Konkurrenz an, wobei  $S_0^{\text{lin}}, S_0^{\text{quad}}$  jeweils den gesamten «Speicherinhalt» zum Zeitpunkt  $t = 0$  bezeichnet, geschätzt nach dem linearen bzw. quadratischen Modell. Die Modellfunktion  $f_1$  enthält also zwei freie Parameter,  $S_0^{\text{lin}}$  und  $a$ , hingegen  $f_2$  drei:  $a, b$  und  $S_0^{\text{quad}}$ . Diese Parameter werden nun, im Sinne der nichtlinearen Regression, z.B. mit dem Solver von *Microsoft Excel*<sup>TM</sup>, durch Minimieren der Fehlerquadratsummen an die gegebenen Abflusszeitreihen angepasst. Es ergeben sich im Einzelnen die folgenden Resultate (gerundet):

- Datensatz 1: Ybbs, 1./2. September 2010. (Vgl. Datenpunkte in *Bild 1*.)

$$S_0^{\text{lin}} = 14,53 \times 10^6 \text{ m}^3, \quad a_* = 1,409 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

$$S_0^{\text{quad}} = 21,85 \times 10^6 \text{ m}^3, \quad a = 8,51 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1},$$

$$b = 4,51 \times 10^{-13} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

Die Fehlerquadratsummen sind

$$FQS_1 = 2933,429, \quad FQS_2 = 1061,168,$$

daraus errechnen sich im Sinne der beiden Vergleichsmethoden in Abschnitt 6:

$$F = 49,4, \quad P_F = 1,2 \times 10^{-7};$$

$$AIC_{\text{corr}}(f_1) = 147,937,$$

$$AIC_{\text{corr}}(f_2) = 119,066.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das quadratische Modell eher zutrifft, ist somit nach dem AIC-Kalkül praktisch 1, der *Evidenzquotient* dafür ist grösser als  $1.895 \times 10^6$ .

- Datensatz 2: Taffa, 2./3. Juni 2010. (Vgl. Datenpunkte in *Bild 2*.)

$$S_0^{\text{lin}} = 4,20 \times 10^5 \text{ m}^3, \quad a_* = 3,85 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

$$S_0^{\text{quad}} = 5,49 \times 10^5 \text{ m}^3, \quad a = 8,97 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1},$$

$$b = 5,816 \times 10^{-11} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

Die Fehlerquadratsummen sind

$$FQS_1 = 18,889, \quad FQS_2 = 4,877,$$

daraus folgt nach Abschnitt 6:

$$F = 51,716, \quad P_F = 1,08 \times 10^{-6}; \quad AIC_{\text{corr}}(f_1) =$$

$$5,1866, \quad AIC_{\text{corr}}(f_2) = -20,1605.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das quadratische Modell eher zutrifft, ist nach AIC wieder praktisch 1, der Evidenzquotient grösser als  $3 \times 10^5$ .

## 8. Modellrechnung für konstante Niederschlagsintensität

Wir führen nun noch, sowohl für das lineare als auch für das quadratische Modell, für beide Gewässer hypothetische Berechnungen durch unter der Annahme, dass am Ende der durch die Daten beschriebenen niederschlagsfreien Periode ein 24-stündiges Niederschlagsereignis mit einer konstanten Gesamtniederschlagsintensität  $I_c$  für das gesamte Einzugsgebiet stattgefunden hat. Wir verwenden dazu die Formeln (5) bzw. (14) und (7), weiter die in Abschnitt 7 jeweils errechneten Werte für  $a, b$  und  $a_*$ .

Für die Ybbs legen wir den plausiblen Niederschlagswert  $I_c = 400 \text{ m}^3/\text{s}$  zugrunde, sowie den Anfangswert  $Q_0^{\text{neu}} = 59.85 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  (letzter Q-Wert des Datensatzes 1). Mittels (7) folgt

$$S_0^{\text{neu}} = \left( \sqrt{4bQ_0^{\text{neu}} + a^2} - a \right) / (2b) = 11,42 \times 10^6 \text{ m}^3.$$

Das Ergebnis ist in *Bild 3* grafisch dargestellt. Analog wird für die Taffa  $I_c = 25 \text{ m}^3/\text{s}$  angenommen, weiter ist  $Q_0^{\text{neu}} = 2.32 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  und  $S_0^{\text{neu}} = 1.92 \times 10^5 \text{ m}^3$ , siehe *Bild 4*. Wie sich zeigt, führt das quadratische Modell, dessen Glaubwürdigkeit ja in Abschnitt 7 erhärtet wurde, zu einer deutlich höheren Prognose für die zu erwartende Abflussstärke  $Q(t)$ . Dies könnte als Indiz angesehen werden, dass das klassische lineare Speichermodell die Abflussentwicklung als Folge eines Niederschlagsereignisses möglicherweise systematisch unterschätzt.

## 9. Zusammenfassung der Ergebnisse

- Es wird eine Variante der mathematischen Speichermodellierung in der Hydrologie dargestellt («quadratischer Speicher»), die bei Tests an empirischen Daten dem klassischen linearen Modell deutlich überlegen ist.
- Dieses quadratische Speichermodell führt ebenfalls zu einer expliziten analytischen Abfluss-Modellfunktion. Die erforderlichen Berechnungen können folglich mit Standardsoftware wie *Microsoft Excel*<sup>TM</sup> durchgeführt werden.
- Es zeigt sich, dass Prognoserechnungen anhand des linearen Modells die zu erwartende Abflussstärke als Folge eines vorgegebenen Blockregens eher unterschätzen, der quadratische Ansatz führt hier tendenziell zu höheren Werten.

Es steht ausser Zweifel, dass aufwendigere Modelle, deren Lösungsfunktionen nur mehr numerisch bestimmt werden können, noch präziser und auch flexibler sein mögen, allerdings um den Preis wesentlich grösserer mathematischer Komplexität und damit auch höherer Anforderungen an die erforderliche Software.

Für weitere Forschungen wäre es von Interesse, den quadratischen Ansatz an möglichst vielfältigen empirischen Daten zu testen, auch unter Berücksichtigung von Niederschlägen, und sowohl mit dem linearen als auch mit komplexeren Modellen zu vergleichen.

#### Danksagung

Die Verfasser danken Herrn Dipl.Ing. *Christian Krammer* und Herrn Mag. *Friedrich Salzer* von der Abteilung Hydrologie und Geoinformation (BD3) des Amtes der NÖ Landesregierung für die zuvorkommende und rasche Bereitstellung der Durchfluss- bzw. Niederschlagsdaten.

Gedankt sei weiter dem hilfreichen Team des Instituts für Wasserwirtschaft, Hydrologie und Konstruktiven Wasserbau der BOKU Wien für sehr informative beratende Kommunikation sowie konstruktiv-kritische Lektüre verschiedener Fassungen dieses Artikels; namentlich Herrn Prof. *Hans-Peter Nachtnebel*, Herrn Prof. *Hubert Holzmann* und Frau *Katharina Lebedziński*. Dank gebührt auch Herrn Professor *Norbert Brunner* vom Institut für Mathematik der BOKU Wien für den Hinweis auf das wert-

volle Zitat [13] sowie für hilfreiche Bemerkungen zum Text.

#### Literatur

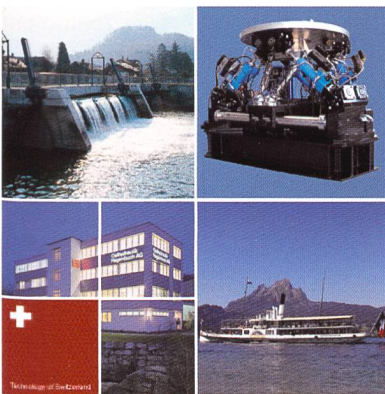
- [1] *A. Baumgartner, H.J. Liebscher* (Hrsg.) (1996), Allgemeine Hydrologie – Quantitative Hydrologie. – In: Lehrbuch der Hydrologie Bd. 1, 2. Aufl., Gebr. Borntraeger, Berlin-Stuttgart.
- [2] *K.P. Burnham, D.R. Anderson* (2002), Model selection and multimodel inference – a practical information-theoretic approach, Springer.
- [3] *V.T. Chow* (ed.) (1964), Handbook of Applied Hydrology, McGraw-Hill, New York u.a.
- [4] *M. Dierks* (o.J.), Anwendungen der Differentialrechnung bei Stauseeentleerungen, Facharbeit. [http://www.lifeandscience.de/fileadmin/downloads/referate/mathematik/Differentialrechnung\\_bei\\_Stauseeentleerungen.pdf](http://www.lifeandscience.de/fileadmin/downloads/referate/mathematik/Differentialrechnung_bei_Stauseeentleerungen.pdf)
- [5] *T. Dracos* (1980), Hydrologie. Eine Einführung für Ingenieure, Springer, Wien, New York.
- [6] *S. Dyck* (Hrsg.) (1980), Angewandte Hydrologie, Teil 1: Berechnung und Regelung des Durchflusses der Flüsse, Teil 2: Der Wasserhaushalt der Flussgebiete, Verlag für Bauwesen, Berlin.
- [7] *S. Dyck, G. Peschke* (1995), Grundlagen der Hydrologie, Verl. F. Bauwesen Berlin.
- [8] *R. Herrmann* (1976), Einführung in die Hydrologie, Teubner Studienbücher Geographie, Stuttgart.
- [9] *H. Heuser* (2004), Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner.
- [10] *R. Hinkelmann* (2005), Hydrologie und

Wasserwirtschaft – Hydrologische Modellierung – Manuskript zur Vorlesung. TU Berlin, Fachgebiet Wasserwirtschaft und Hydroinformatik.

- [11] *W. Hosang, W. Bischof* (1998), Abwassertechnik, Teubner.
- [12] *U. Maniak* (2005), Hydrologie und Wasserwirtschaft. Eine Einführung für Ingenieure, 5. Aufl., Springer, Berlin.
- [13] *H.J. Motulsky, A. Christopoulos* (2003), Fitting models to biological data using linear and nonlinear regression. A practical guide to curve fitting. GraphPad Software Inc., San Diego CA. <http://www.graphpad.com>
- [14] *K.H. Schmidt* (1984), Der Fluss und sein Einzugsgebiet – Hydrogeographische Forschungspraxis, Wissenschaftl. Paperbacks, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden.
- [15] *E.M. Shaw*, (1994), Hydrology in Practice, Chapman & Hall, London u.a.

#### Anschrift der Verfasser

Prof. Dr. *Werner Georg Nowak, Harald Führer*, BSc, Institut für Mathematik, Department für Integrative Biologie, Universität für Bodenkultur Wien, Gregor-Mendel-Strasse 33, AT-1180 Wien



## Hydraulische Lösungen - alles aus einer Hand

### Planen - entwickeln - produzieren

Als innovatives Schweizer Traditionsunternehmen sind wir spezialisiert auf hydraulische Steuerungs- und Antriebstechnik. Ob grosse, komplexe Herausforderungen oder Einzelkomponenten: Jeder Auftrag ist für uns der Wichtigste.

**Bei Fragen, Anliegen oder Projekten freut es uns, für Sie da zu sein.**



**Oelhydraulik Hagenbuch AG, Rischring 1, CH-6030 Ebikon, Tel. +41 (0)41 444 12 00, Fax +41 (0)41 444 12 01**

[oh@hagenbuch.ch](mailto:oh@hagenbuch.ch), [www.hagenbuch.ch](http://www.hagenbuch.ch), [www.hydraulikshop.ch](http://www.hydraulikshop.ch)

**OHE**  
Oelhydraulik Hagenbuch AG