Präparation zu den Aufgaben über die Zinseszinsrechnung im Bodmer III

Autor(en): **Pfister, Otto**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahrbuch der Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich**

Band (Jahr): **- (1913)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-819556

Präparation

zu den Aufgaben über die Zinseszinsrechnung im Bodmer III.

Von **Otto Pfister**, Sekundarlehrer,
Winterthur.

I.

Wieviel Zins trägt ein Franken bei 4 %-iger Verzinsung per Jahr?	4 Rappen
Auf welchen Betrag wächst also ein Franken durch den Zinszuschlag in einem Jahr?	1,04 Fr.
Auf welchen Betrag wachsen 2, 3, 7, 100 k Fr. in einem Jahr? Antwort in Produktform!	2 . 1,04 etc. Fr., k. 1,04
Wie finden wir also überhaupt den Endwert eines Kapitals nach einem Jahr bei 4 %-iger Verzinsung?	Durch Multiplikation mit 1,04
Das gleiche Kapital liege ein weiteres Jahr am Zins. Welches ist der Anfangswert für dieses zweite Jahr?	k 1,04
Was ist nach dem obigen Satze zu tun, um den zweiten Endwert zu finden?	Multiplikation mit 1,04
Wieviel ist also der Endwert nach dem 2. Jahr?	k 1,04 . 1,04
Nach dem 3., 4., 5. Jahr?	k 1,04 . 1,04 . 1,04, k 1,04 . 1,04 . 1,04 . 1,04 etc.
Wie können wir diese Endwerte vereinfacht schreiben?	$k\ 1{,}04^1$, $k\ 1{,}04^2$, $k\ 1{,}04^3$ etc.
Wie heißen diese Formeln, wenn wir für die Zahl 1,04 den Buchstaben v setzen?	$k\ v^1$, $k\ v^2$ etc.
Wie heißt die Formel, wenn wir die Anzahl der Jahre allgemein mit n bezeichnen?	kv^n
Bezeichnen wir den Endwert mit e. Welche Gleichung ist also das Ergebnis unserer Ableitung?	$e = kv^n$
Das Anfangskapital sei uns bekannt. Was müssen wir noch kennen, um den Wert nach 7, 10, 20 n Jahren berechnen zu können?	v^7, v^{10}, v^{20}, v^n

Was sollte wohl der besitzen, der oft in die Lage kommt, solche Rechnungen auszuführen?

Eine Tabelle der Potenzen von v

Diese bietet uns unser Buch in der Tabelle a für die Zinsfüße 3,5 % und 4 %. Sagt mir von einzelnen Zahlen dieser Tabellen, was sie sind?

1,147523 ist die vierte Potenz von 1,035 usf.

Das Kapital 1000 Fr. liege 10 Jahre am Zins, zu 4 %. Was haben wir einfach zu rechnen, um den Endwert zu bekommen?

$1000 \,.\, 1{,}04^{10}$
$= 1000 \,.\, 1{,}480244$
$=$ Fr. $\underline{1480{,}24}$

Lest mir ab, was aus 10,000 Fr. wird in 2, 5, 20, 50, 100 Jahren (4 %)!

10816 Fr. etc.

Setzt die Zahlen ein, wenn das Anfangskapital Fr. 3500, der Zinsfuß 3,5 % und die Verzinsungsdauer 7 Jahre ist!

Fr. 3500 . 1,272279

Löset nun die Aufgaben im Buch!

II.

Wie erhalten wir den Endwert nach 5 Jahren, wenn das Kapital zu 4 % angelegt ist?

Wir multiplizieren das Anfangskapital mit der 5. Potenz von 1,04

Wie finden wir im gleichen Fall das Anfangskapital, wenn uns der Endwert gegeben ist?

Durch Division durch $1{,}04^5$

Wie finden wir überhaupt das Anfangskapital, wenn wir wieder die Anzahl der Jahre mit n, $1 \times \frac{p}{100}$ mit v und den Endwert mit e bezeichnen?

Wir dividieren e durch v^n

Wir wollen dasselbe algebraisch ableiten. Welches war die Formel für die Bezeichnung des Endwertes?

$e = kv^n$

Was haben wir zu tun, wenn nun e bekannt, k aber gesucht ist?

Die Gleichung wird nach k aufgelöst, indem wir beide Seiten der Gleichung durch v^n dividieren

Welcher Wert ergibt sich also für k?	$k = \frac{e}{v^n}$
Berechnet also nach Tabelle a den Anfangswert von 1000 Fr. Endwert, bei einer Zinsdauer von 8 Jahren, Zinsfuß = 1,035!	$k = \frac{1000}{1,316809}$
Die Division durch so lange Dezimalbrüche ist unpraktisch. Womit können wir multiplizieren, statt durch 4, 8, 10, a zu dividieren?	Mit $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{10}$, $^1/_a$
Welche Multiplikation kann also an die Stelle der Division durch v^n treten?	Multiplikat. mit $\frac{1}{v^n}$
Wir haben vorhin den Anfangswert gesucht für den Endwert 1000 Fr.; womit hätten wir das Endkapital multiplizieren müssen, um das Anfangskapital zu bekommen?	Mit $\frac{1}{1,316809}$
Rechnet diesen Wert aus!	0,7594116
Ihr findet ihn ausgerechnet in Tabelle b. Sagt mir von einigen Zahlen der Tabelle b, was sie wohl sind?	$0,8135006 = \frac{1}{1,035^6}$ $0,4563869 = \frac{1}{1,04^{20}}$ etc.
Wie erhält man Tabelle b aus Tabelle a?	Wir dividieren 1 durch die Zahlen in Tabelle a
Welche Werte bietet also Tabelle a?	$\frac{1}{v^n}$
Wie heißt die Formel $k = \frac{e}{v^n}$, wenn wir nun die Multiplikationsform einsetzen?	$k = e\,\frac{1}{v^n}$
Endwert 100,000 Fr. Welches war der Anfangswert, Dauer 50 Jahre, Zinsfuß 4%. Wie rechnen wir dies nun einfach?	Wir multiplizieren 100,000 mit $\frac{1}{v^n}$ in Tabelle b, also 100,000 $\times$ 0,1407126
Wieviel ist das?	Fr. 14071.26

Sprecht das in einem Satz aus!	Wenn jemand nach 50 Jahren 100,000 Fr. zugut haben will, so muß er heute Fr. 14071. 26 zu 4 % anlegen
Wir lösen nun die Aufgaben No. 150 bis 152!	

III.

Wozu wird ein Kapital in n Jahren, wenn $1 + \frac{p}{100}$ mit v bezeichnet ist?	Zu k v^n
Ein Vater legt seinem Kind jedes Neujahr 100 Fr. in die Kasse. Was wird aus jeder Zahlung bis am Ende von zehn Jahren, Zinsfuß 4 %? Lest die Werte ab!	$100 . 104^{10} +$ $100 . 1{,}04^9$ $\ldots . 100 . 1{,}04^2 +$ $100 . 1{,}04^1$
Die jährliche Zahlung (Annuität) sei a, $1 + \frac{p}{100}$ wieder v. Welches ist der Wert von 10 Annuitäten am Ende von 10 Jahren, einzeln? zusammen?	$av^{10} + av^9 + av^8 +$ $\ldots . av^2 + av^1$
Wie viel wird immer die letzte Annuität?	av^1
Die zweitletzte?	av^2
Die drittletzte?	av^3
Die ersteinbezahlte?	av^n
Die zweiteinbezahlte?	av^{n-1}
Die folgende?	av^{n-2} usw.
Welches ist also die Summe aller Annuitäten nach n Jahren	$av^n + av^{n-1} +$ $av^{n-2} \ldots av^2 + av^1$!
Welche algebraische Vereinfachung können wir bei dieser Summe vornehmen?	Wir sondern a ab
Welche Formel ergibt sich also für den Endwert in n Jahren?	$e = a\ (v^n + v^{n-1} \ldots . + v^2 + v^1)$
Sprecht sie in Worten aus!	Der Endwert von n Annuitäten wird gefunden, indem wir die Annuität mit der Summe aller Potenzen von v bis v^n multiplizieren

Nach welcher Tabelle wäre das auszurechenen?	Nach Tabelle a
Was hätten wir also zu tun, wenn n = 7 ist?	Wir müssen die 7 ersten Potenzen von v addieren und die Annuität mit der Summe multplizieren
Die Summe der Potenzen gibt uns Tabelle c,	
Wie viel ist also nach Tabelle c die Summe der ersten fünf Potenzen von 1,035!	5,550152
Rechnet sie nach!	
Sagt mir von einigen Zahlen der Tabelle c, was sie sind!	16,676986 ist die Summe der Portenzen von $1{,}035^1$ bis $1{,}035^{13}$ etc.
Jedes Neujahr legt jemand 1000 Fr. auf die Bank. Wie viel hat er nach 20 Jahren zu gut beim einem Zinsfuß von 4 %?	Wir multiplizieren 1000 Fr. mit der Summe der ersten zwanzig Potenzen von 1,04
Was haben wir also nach Tabelle c zu rechnen?	1000 . 30,969202
Was sagt uns die letzte Zahl in Tabelle c, bei 4 %?	Wenn man 100 Jahre lang jedes Jahr 1 Fr. an den Zins legt à 4 %, so beträgt der Endwert aller Zahlen Fr. 1287,128

Wir lösen aus dem Buche Aufgabe 153—156!

IV.

Wie finden wir nun umgekehrt die Annuität, wenn uns der Endwert gegeben ist?	Wir dividieren durch die betr. Potenzensumme in Tabelle c
Wie heißt also die Formel?	$a = \frac{e}{v^n + v^{n-1} \ldots v^2 + v^1}$

Jemand möchte in 15 Jahren 10,000 Fr. Vermögen besitzen. Wie viel muß er im Anfang jedes Jahres einlegen bei einer Verzinsung von 3,5 %?

$$k = \frac{e}{1{,}035^{15} + 1{,}035^{14} \ldots + 1{,}035^2 + 1{,}035^1} = \frac{10000}{19{,}971030}$$

Rechnet Aufgabe 157—159!

V.

Eine Gemeinde hat für einen Schulhausbau 100,000 Fr. entlehnt. Sie hat diese Summe zu 4 % zu verzinsen, und will in 20 gleichen Jahresraten auf Jahresanfang sich ihrer Schuld entledigen. Denken wir uns die Schlußabrechnung in Kontokorrentform. Auf welchen Betrag wächst die Schuld bis dahin an, also die Sollseite?	$100000 \,.\, 1{,}04^{20}$
Was steht im Haben?	Die 20 Zahlungen u. und ihre Zinsen
Wozu ist jede angewachsen, wenn immer im Jahresanfang die Zahlung geleistet wurde?	$a \,.\, 1{,}04^{20}$, $a \,.\, 1{,}04^{19}$ etc. bis $1{,}04^{1}$
Wie heißt ihre Summe?	$a = (1{,}04^{20} + 1{,}04^{19}$ etc. bis $1{,}04^{1})$
Wie könnten wir die Schlußsummen berechnen?	Soll: $100000 \; 1{,}04^{20}$ aus Tab. a Haben: a. (Potenzensumme) aus Tab. c
Da die Gemeinde bis dahin ja alles bezahlt, sind diese Summen gleich.	$100000 \,.\, 1{,}04^{20} = a\,(1{,}04^{20} + 1{,}04^{19} \ldots 1{,}04^{1})$
Wie finden wir also die Annuität?	Wir dividier. d. Endwert $(100000 \,.\, 1{,}04^{20})$ durch die Potenzensumme $(1{,}04^{20} + 1{,}04^{19} \ldots 1{,}04^{1})$
Eine Schuld k soll in n Resten je auf Jahresanfang abbezahlt werden. Wie viel betrüge der Endwert der Schuld, wenn nichts abbezahlt würde?	kv^{n}
Nun haben wir eben unsere Abzahlungen so zu richten, daß die n Annuitäten samt Zins den gleichen Endwert erreichen, Wie finden wir also die Annuität nach dem Frühern?	Wir dividieren durch die Summe der ersten n Potenzen von v
Welche Formel läßt sich also für die Annuität aufstellen?	$a = \dfrac{kv^{n}}{v^{n} + v^{n-1} \ldots + v}$
Setzt die Zahlen ein, die wir oben annehmen.	$a = \dfrac{100000.\,2{,}191123}{30{,}969202}$

Aus welchen zwei Teilen setzt sich also unsere Amortisationsrechnung zusammen?

1. Berechnung des Endwertes
2. Berechnung der Annuität

Wer spricht nun in Worten aus, was zu tun ist, um die Annuität zu berechnen, wenn ein Kapital k durch n gleiche Raten auf Jahresanfang amortisiert werden soll?

Wir berechnen zuerst den Endwert, indem wir das Kapital m. v^n multiplizieren; dann dividieren wir den gefundenen Endwert durch die Summe der n ersten Potenzen von v

Rechnet Nr. 161.

VI.

Auf welchen Zeitpunkt wurden in den zuletzt gelösten Aufgaben die jährlichen Abzahlungen geleistet?

Auf den Jahresanfang

Nehmen wir an, eine Gemeinde nehme heute bei der Bank Fr. 100000.— auf, die sie in 5jährlichen Abzahlungen tilgen will. Wann wird die erste wohl geleistet werden?

Nach einem Jahr

Die letzte?

Nach fünf Jahren

Wie lange liegt die letzte Annuität am Zins?

Sie trägt keinen Zins mehr

Mit welchem Wert (in Buchstaben) ist sie also der Gemeinde ins Haben zu setzen?

Mit a

Wie viel wird die zweitletzte, drittletzte bei 4 % Zins?

$a \cdot 1{,}04$, $a \cdot 1{,}04^2$, $a \cdot 1{,}04^3$, $1 \cdot 1{,}04^4$

Wie lange liegt also die erste Annuität am Zins?

4 Jahre

Welche Summe steht also schließlich im Haben?

$a \cdot 1{,}04^4 + a \cdot 1{,}04^3 + 1 \cdot 1{,}04_2 + a \cdot 1{,}04^1 + a$

Wir wollen die Aufgabe allgemein lösen. — Heute wird ein Kapital K entlehnt, das durch n Annuitäten getilgt werden soll, die auf Ende des Jahres geleistet werden. Für welchen Betrag ist die Gemeinde nach n Jahren belastet?

Für $k \cdot v^n$

Was wird ihr gutgeschrieben?	Die n Annuitäten mit Zinseszinsen
Beginnen wir mit der letzten.	
Welchen Wert hat sie am Schluß?	a
Die zweitletzte usw.	av^1, av^2, usw.
Wie lang lag die erste am Zins?	(n—1) Jahre
Ihr Endwert ist also?	av^{n-1}
Der Endwert der zweiten, dritten etc.	av^{n-2}, av^{n-3} usw.
Welche Summe steht also im Haben?	$av^{n-1} + av^{n-2} \ldots av^2 + av^1 + a$
Vereinfacht die Summe.	$a\,(v^{n-1} + v^{n-2} \ldots v^2 + v^1 + 1)$
Stellt wieder die Gleichung auf, aus der wir a bestimmen können	$a\,(v^{n-1} + v^{n-2} \ldots v^2 + v^1 + 1) = kv^n$
Welcher Wert ergibt sich also für a?	$a = \dfrac{kv^n}{v^{n-1} + v^{n-2} \ldots + v^1 + 1}$
In welche zwei Teile zerfällt also die Rechnung?	Wir berechnen den Endwert von k nach v Jahren. Dann dividieren wir ihn durch die um 1 vermehrte Summe der (n—1) ersten Potenzen von v.
Welches ist der Wert des Divisors bei 3,5 % und 16 Jahren	20,971030
Setzt die Werte ein, wenn das entlehnte Kapital Fr. 100,000.— in zehn Annuitäten amortisiert werden soll bei einem Zinsfuß von 4 %.	$\dfrac{100000 \,.\, 1{,}480244}{11{,}006107 + 1} = \dfrac{100000 \,.\, 1{,}480244}{12{,}006107}$
Löset Aufgabe 162.	